

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

Л. Б. Ряшко, И. А. Башкирцева

СТОХАСТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2010

Рецензенты:

кафедра кибернетики Московского государственного института электроники и математики (технического университета) (заведующий кафедрой доктор технических наук, профессор В. Н. Афанасьев);

Б. И. Ананьев, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела оптимального управления (Институт математики и механики УрО РАН)

Ряшко Л. Б.

Р999 Стохастические аттракторы нелинейных динамических систем / Л. Б. Ряшко, И. А. Башкирцева. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2010. – 252 с.

ISBN 978-5-7996-0528-5

Исследуются устойчивость, чувствительность и стабилизация стохастически возмущенных нелинейных динамических систем. Объектом анализа являются стохастические аттракторы – точки покоя, циклы и торы. Значительное внимание уделяется исследованию конкретных нелинейных динамических систем, в том числе в зонах перехода от порядка к хаосу.

Для специалистов в области теории стохастических нелинейных колебаний, научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся указанными проблемами.

УДК 517.938

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов
Федерального агентства по образованию 2.1.1/2571,
ФЦП 02.740.11.0202, РФФИ 09-01-00026, 09-08-00048, 10-01-96022урал*

ISBN 978-5-7996-0528-5

© ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А. М. Горького», 2010
© Ряшко Л. Б., Башкирцева И. А., 2010

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Введение | 5 |
| 1. Среднеквадратичная устойчивость | 14 |
| 1.1. Инвариантные многообразия. Стохастическая устойчивость | 14 |
| 1.2. Квадратичные функции Ляпунова. Критерий ЭСК- устойчивости | 18 |
| 1.3. Стохастические линейные расширения. P -устойчивость | 21 |
| 1.4. Функции Ляпунова для стохастических линей- ных расширений. Критерий P -устойчивости . . | 27 |
| 1.5. Теорема о стохастической устойчивости по пер- вому приближению | 34 |
| 1.6. Спектральный критерий | 36 |
| 1.6.1. Системы с шумами второго типа. Оценки спектрального радиуса оператора \mathcal{P} . . . | 42 |
| 1.7. Устойчивость точки покоя | 49 |
| 1.8. Устойчивость цикла | 55 |
| 1.8.1. Случай цикла на плоскости | 59 |
| 1.9. Устойчивость 2-тора | 62 |
| 1.9.1. Случай 2-тора в трехмерном пространстве | 68 |
| 1.10. Устойчивость линейных стохастических систем с периодическими коэффициентами | 74 |
| 2. Стохастическая чувствительность | 85 |
| 2.1. Функция стохастической чувствительности . . . | 85 |
| 2.1.1. Квазипотенциал и его аппроксимация . . | 87 |
| 2.1.2. Параметризация функции стохастической чувствительности | 89 |
| 2.1.3. Связь с системами первого приближения | 92 |
| 2.2. Стохастическая чувствительность точки покоя . | 98 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 2.2.1. | Системы с ненормальными матрицами . . . | 102 |
| 2.2.2. | Индукцированный шумами переход к турбулентности | 105 |
| 2.2.3. | Стохастическая генерация магнитного поля галактик | 112 |
| 2.3. | Стохастическая чувствительность циклов | 122 |
| 2.3.1. | Итерационный метод | 125 |
| 2.3.2. | Чувствительность $2D$ -циклов | 128 |
| 2.3.3. | Стохастический осциллятор Ван-дер-Поля | 132 |
| 2.3.4. | Брюсселятор с возмущениями: неравномерная чувствительность и хаос | 137 |
| 2.3.5. | Чувствительность $3D$ -циклов | 148 |
| 2.3.6. | Стохастическая модель Ресслера | 155 |
| 2.3.7. | Стохастическая модель Лоренца | 167 |
| 2.3.8. | Разложение функции стохастической чувствительности по малому параметру | 180 |
| 2.4. | Стохастическая чувствительность 2-торов | 189 |
| 2.4.1. | Чувствительность 2-тора в трехмерном пространстве | 192 |
| 3. | Стабилизация | 201 |
| 3.1. | Стабилизация инвариантных многообразий | 201 |
| 3.2. | Стабилизация точки покоя | 206 |
| 3.3. | Стабилизация цикла | 211 |
| 3.3.1. | Случай цикла на плоскости | 213 |
| 3.4. | Стабилизация 2-тора | 217 |
| 3.5. | Стабилизация линейных стохастических систем с периодическими коэффициентами | 220 |
| | Список использованных источников | 227 |

Введение

Исследования последних лет показали, что разнообразие, наблюдаемое в поведении нелинейных динамических систем, можно свести к анализу относительно простых инвариантных многообразий и их качественных преобразований (бифуркаций). Так, например, одним из стандартных сценариев перехода от порядка к хаосу [18, 95] служит цепь последовательных бифуркаций: положение равновесия (точка покоя) – периодические колебания (цикл) – квазипериодические колебания (тор) – хаотические колебания (странный аттрактор). Каждый такой переход сопровождается потерей устойчивости простого многообразия и рождением нового, более сложного устойчивого многообразия. Присутствие случайных возмущений, связанных как с внешними неконтролируемыми воздействиями, так и внутренними параметрическими флуктуациями, может существенно повлиять на тонкий механизм бифуркаций и вызвать неожиданные качественные изменения в поведении системы. Анализ стохастической устойчивости соответствующих колебательных режимов является здесь ключевым моментом в понимании механизма сложных явлений нелинейной динамики. Разработка методов управления даст возможность, придавая аттракторам те или иные желаемые вероятностные свойства, решать важные прикладные задачи синтеза систем с требуемыми наперед заданными характеристиками.

В современной теории случайных процессов имеется большое количество различных динамических моделей, отражающих те или иные вероятностные особенности исследуемых реальных систем. В данной работе рассматривается классическая модель – система стохастических дифференциальных уравнений Ито. Первым примером стохастического дифференциального уравнения в физике было уравнение Ланжевена [64, 223],

которое оказалось идейно связано с предложенной Эйнштейном и Смолуховским [123] конструкцией броуновского движения. Развитие математической теории броуновского движения, начатое в работах Винера [272] и Леви [65], привело к разработке его формальных моделей – винеровского процесса и мартингала.

Построение теории стохастических дифференциальных уравнений с использованием соответствующих разностных уравнений дано в работах С. Н. Бернштейна [19] и И. И. Гихмана [29]. Другой подход, опирающийся на конструкцию стохастического интеграла по винеровскому процессу, использовал Ито [42, 206]. Его простое и удобное построение решения стохастического уравнения и соответствующее стохастическое исчисление (формула Ито) является общепринятым и хорошо представлено в научно-методической литературе (см. [31, 38, 75, 76, 101, 132]). Система стохастических уравнений Ито служит базовой моделью в современной теории стохастической устойчивости и управления [13, 26, 58, 62, 116, 119, 121, 133, 279]. Дальнейшая разработка стохастического анализа привела к появлению новых конструкций и более общих схем (интеграл Стратоновича [112], интегралы по мартингалам и точечным процессам [25]), позволяющих существенно расширить класс стохастических дифференциальных уравнений. В настоящее время стохастические дифференциальные уравнения имеют хорошо разработанную формальную математическую теорию и разнообразные приложения.

Современная теория устойчивости и управления стохастическими системами охватывает широкий круг актуальных задач, включает большое число разнообразных методов, имеет прочные связи с другими разделами математики и многочисленные приложения.

Ее становление относится к 60-м гг. XX столетия и связано

с именами Н. Н. Красовского, Р. З. Хасьминского, Г. Дж. Кушнера (Y. J. Kushner), У. Флеминга (W. H. Fleming).

Теория стохастической устойчивости отличается разнообразием задач и методов их решения. Это связано с двумя обстоятельствами: существованием большого количества типов вероятностных динамических моделей и наличием нескольких различных видов стохастической устойчивости. Материал, представленный в монографии, примыкает к той части этой теории, в которой для инвариантных многообразий стохастических дифференциальных уравнений Ито исследуется экспоненциальная устойчивость в среднем квадратичном методом стохастических функций Ляпунова.

Метод стохастических функций Ляпунова, начиная с основополагающих работ [45, 56], является теоретическим фундаментом анализа устойчивости и стабилизации стохастических систем. Этот метод позволил не только распространить на стохастические уравнения базовые конструкции классической теории детерминированной устойчивости, но и получить новые интересные результаты, отражающие особенности, присущие только вероятностным системам. Возможности метода функций Ляпунова в применении к системам случайной структуры продемонстрированы в [44, 102].

Случай, когда инвариантное многообразие есть точка покоя, рассматривается давно, достаточно хорошо исследован и имеющиеся здесь результаты уже составляют глубоко разработанную часть общей теории стохастической устойчивости нелинейных динамических систем.

Следующим за точкой покоя в цепи бифуркаций инвариантных многообразий идет предельный цикл. Предельный цикл является математической моделью автоколебаний, наблюдаемых в системах самой различной природы – электронных генераторах, механических конструкциях, химических реакциях,

сообществах живых организмов. Исследование детерминированной устойчивости периодических решений на плоскости началось с работ Ляпунова и Пуанкаре. Для общего случая предельных циклов многомерных систем основные результаты детерминированного варианта теории устойчивости (теорема Андронова – Витта и ее аналоги [7, 35, 47, 118]) были получены с помощью теории Флоке в русле первого метода Ляпунова еще в 30-х гг. Соответствующие конструкции функций Ляпунова, необходимые для анализа устойчивости стохастически возмущенных предельных циклов, долгое время отсутствовали.

Исследование воздействий случайных возмущений на поведение автоколебаний нелинейных систем было начато в работе Л. С. Понтрягина, А. А. Андронова, А. А. Витта [103]. В дальнейшем эти исследования были продолжены в большом числе работ и отражены в монографиях [8, 10, 22, 37, 84, 104, 111, 205, 263], посвященных флуктуациям в радиофизических и механических системах.

Под воздействием стохастических возмущений случайные траектории системы покидают замкнутую орбиту детерминированного предельного цикла и формируют вокруг него некоторый пучок. Благодаря устойчивости цикла плотность распределения вероятности случайных состояний в этом пучке стабилизируется. Установившееся вокруг цикла стационарное вероятностное распределение определяет соответствующий стохастический аттрактор – стохастический предельный цикл. Для теории случайных нелинейных колебаний несомненный интерес представляют исследования стохастических предельных циклов как вблизи точки бифуркации Андронова – Хопфа (квазигармонические колебания), так и в зоне параметров, удаленной от этой точки (релаксационные колебания). Стохастически возмущенные предельные циклы изучались в [63, 89, 90, 142, 170, 175, 191, 192, 218, 230, 240, 262, 267].

Связанные с шумами качественные эффекты, наблюдаемые в зоне рождения цикла, исследовались в работах [93, 134, 153, 166, 187, 225, 226, 227, 237, 239]. Существенная неравномерность стохастических пучков вдали от точки бифуркации исследовалась в [126, 172, 221, 241].

Развитие теории нелинейных систем, вызванное открытием хаотических осцилляций, разработка общих сценариев разрушения регулярных колебаний, связанных с последовательными бифуркациями удвоения периода, поставили новые актуальные задачи исследования стохастических возмущений сложных пространственных многооборотных предельных циклов.

Сложности аналитического описания вероятностных характеристик стохастических аттракторов размерности три и выше заставили исследователей обратиться к методам прямого численного моделирования случайных траекторий. Это стимулировало разработку численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Полученные в этом направлении теоретические результаты представлены в монографиях [60, 88, 216, 217, 234].

Численному исследованию классических моделей Ресслера и Лоренца в присутствии случайных возмущений посвящены работы [9, 10, 50, 127, 211, 283].

Следующее по сложности за циклом инвариантное многообразие – тор. Этот объект, ставший классическим после работ Пуанкаре, Данжуа и Арнольда [12], достаточно подробно исследовался с точки зрения его структурной устойчивости (КАМ-теория). Анализу детерминированной устойчивости тороидальных движений к возмущению начальных данных посвящены работы [34, 48, 49, 94, 110].

Бифуркации тороидальных многообразий исследовались в [83, 131, 208, 212].

Поведение стохастически возмущенной системы исчерпы-

вающим образом (в терминах переходной плотности распределения) описывается уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова. Непосредственное использование этого уравнения даже в простейших ситуациях (например, когда рассматривается стационарно-распределенное состояние автоколебательной системы с одной степенью свободы) весьма затруднительно. Важный для практики случай – воздействия малых помех – приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных.

В настоящее время известны различные подходы, позволяющие для искомых вероятностных характеристик найти соответствующие приближения. Разработан метод, основанный на замене исследуемого процесса на эквивалентный гауссовский. Аналитически этот метод сводится к обрыву бесконечномерной последовательности уравнений для моментов высших порядков, когда ограничиваются лишь первыми двумя моментами. Для случая квазигармонических колебаний данный прием использовался в [263]. Подход, связанный со стохастическим усреднением в русле метода малого параметра теории возмущений, рассмотрен в работах [37] и [111].

Для систем с малыми случайными возмущениями в работе А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина [26] предложен подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова – квазипотенциал, с помощью которой можно находить асимптотики ряда важных вероятностных характеристик выхода случайных траекторий из области (задача о выбросах), содержащей устойчивое предельное множество исходной детерминированной системы. Применительно к точке покоя данный подход в рамках теории больших отклонений развивался в работах [159, 173]. Метод квазипотенциала для предельного цикла рассматривался в работах [90, 169, 170, 171, 191, 192, 230, 240, 262], а для более сложных фрактальных аттракторов – в

[174, 193]. Теории больших уклонений в анализе стохастических дифференциальных уравнений на торе посвящена работа [27].

Разнообразие форм аттракторов, наблюдаемых в нелинейных динамических системах, заставляет искать общие подходы, которые позволили бы охватить единой теорией как уже исследованные, так и потенциально возможные случаи. Таким направлением является качественная теория динамических систем с произвольными инвариантными многообразиями. В детерминированном случае теория общих инвариантных многообразий развивалась в работах [23, 99, 100, 128, 158, 184, 200, 213, 273].

Общие вопросы, касающиеся многообразий и аттракторов стохастических систем, рассматривались в [20, 130, 133, 152, 157, 176, 236, 256, 257, 258].

Одним из актуальных разделов естествознания, где находит применение современная теория устойчивости вероятностных нелинейных процессов, является стохастический анализ динамических систем при переходе от ламинарного режима к турбулентному.

В последние годы и особенно после оригинальной работы [268] активно развивается теория такого перехода, основанная на свойстве ненормальности оператора динамической системы. Ненормальность линеаризованного уравнения Навье – Стокса приводит к всплеску возмущений даже в случае устойчивости равновесного состояния. Нелинейность системы приводит к дальнейшему усилению малых начальных возмущений. В результате переход к турбулентности происходит не вследствие линейной неустойчивости стационарного ламинарного потока, а в результате сочетания ненормальности, порождающей высокую чувствительность к возмущениям, и нелинейности, переводящей систему в бассейн притяжения турбулентного ре-

жима. Обзоры исследований этого явления имеются в работах [140, 160, 194, 259].

Некоторые теоретические исследования, посвященные стохастически возмущенным динамическим системам с ненормальным оператором, представлены работами [149, 177, 178].

Свойство ненормальности играет важную роль и в понимании природы генерации больших магнитных полей в астрофизических объектах. Хорошо известно, что магнитное поле генерируется турбулентным потоком электропроводящей жидкости. Результаты исследования целого ряда моделей, описывающих динамику возникающих магнитных полей, представлены в обзоре [271].

Традиционно явление генерации магнитного поля связывают с переходом системы из зоны устойчивости (субкритический случай) в зону неустойчивости (суперкритический случай). С точки зрения классической теории детерминированной устойчивости генерация магнитного поля должна наблюдаться лишь в суперкритическом случае. Однако в работах [179, 180] было показано, что вследствие ненормальности возможна генерация поля и в зоне параметров, относящихся к субкритическому случаю. Такой субкритический переход из нулевого равновесия в области, где действуют уже значительные по величине магнитные поля, невозможно удовлетворительно объяснить, оставаясь в рамках чисто детерминированной теории. Важность влияния шума в проблеме генерации магнитного поля сейчас общепризнанна. Стохастическая динамика магнитных полей рассматривалась в работах [180, 202, 203].

Таким образом, понимание природы генерации магнитного поля предполагает учет трех факторов: нелинейности, стохастичности и ненормальности.

Задачи управления колебаниями в нелинейных динамических системах исследуются достаточно давно. Необходимость

в стабилизации неустойчивых периодических решений (орбит) возникает при устранении вибраций механических конструкций, подавлении шумов и нежелательных гармоник в системах связи и электронных устройствах, локализации возможных отклонений от требуемых характеристик в формируемых периодических режимах. Наряду с задачей стабилизации, связанной с подавлением нежелательных колебаний, рассматривается задача возбуждения заданного колебательного режима. Подобная задача встречается при разработке вибрационных механизмов, акустических и электронных генераторов. Необходимость согласования во времени состояний взаимодействующих колебательных систем привела к задачам управления синхронизацией.

В настоящее время результаты исследований по управлению колебаниями составляют глубоко разработанную теорию, основное содержание которой представлено работами [1, 2, 4, 33, 40, 46, 57, 69, 70, 71, 87, 114, 115, 117, 122, 125, 139, 150, 155, 185, 186, 188, 243, 269, 280].

В последнее время в теории управления нелинейными колебательными системами появилось и активно разрабатывается новое научное направление – управление хаосом. Всплеск интереса к задачам управления хаотическими аттракторами связывают с выходом в 1990 г. работы Т. Ott, С. Grebogi, G. Jorke [242]. Здесь наряду с традиционными задачами подавления хаоса, когда целью управления является преобразование хаотического аттрактора в регулярный (предельный цикл или точку покоя), рассматриваются задачи возбуждения в управляемой системе хаотических колебаний, построения генераторов хаоса. Генераторы хаоса активно используются в области защиты информации. Соответствующее научное направление (controlling chaos) представлено работами [3, 5, 6, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 129, 156, 161, 162, 163, 164, 165, 197, 204, 210, 229, 244, 261, 281].

Вопросы управления колебаниями в системах со случайными возмущениями рассматривались в работах [46, 89].

Данная монография состоит из трех глав. Первая глава посвящена анализу экспоненциальной устойчивости в среднеквадратичном инвариантных многообразий динамических систем, в которых случайные возмущения вырождаются на детерминированном аттракторе. Случай, когда стохастические возмущения действуют и на многообразии, рассмотрен во второй главе. В третьей главе рассматривается задача стабилизации.

1. Среднеквадратичная устойчивость

1.1. Инвариантные многообразия. Стохастическая устойчивость

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в n -мерном евклидовом пространстве

$$dx = f(x) dt, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

где $f(x)$ – достаточно гладкая вектор-функция.

Предполагается, что система (1.1) имеет гладкое компактное инвариантное многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим в некоторой окрестности U многообразия M функции

$$\gamma(x) = \operatorname{argmin}_{y \in M} \|x - y\|, \quad \Delta(x) = x - \gamma(x),$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма, $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка многообразия M , а $\Delta(x)$ – вектор отклонения x от M . Предполагается, что для системы (1.1) окрестность U инвариантна. Функция $\gamma(x)$ в общем случае может быть многозначной. Однако вблизи достаточно гладкого многообразия M все обстоит просто.

При рассмотрении вопросов устойчивости окрестность U можно считать достаточно малой. При этом $\gamma(x)$ и $\Delta(x)$ будут в U однозначными и гладкими функциями [39].

Определение 1.1. Инвариантное многообразие M называется *экспоненциально устойчивым* (*Э-устойчивым*) для системы (1.1) в U , если при некоторых $K > 0$, $l > 0$ для всех $t \geq 0$ выполняется условие

$$\|\Delta(x(t))\| \leq K e^{-lt} \|\Delta(x_0)\|,$$

где $x(t)$ – решение системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

Стандартной моделью при анализе устойчивости детерминированной системы (1.1) к воздействию случайных возмущений является система стохастических уравнений Ито [119]

$$dx = f(x) dt + \sum_{r=1}^m \sigma_r(x) dw_r(t), \quad x, f, \sigma_r \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Здесь $w_r(t)$ ($r = 1, \dots, m$) – независимые стандартные винеровские процессы, заданные на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , $f(x)$ и $\sigma_r(x)$ – достаточно гладкие вектор-функции. Для того чтобы многообразие M оставалось инвариантным и для системы (1.2), предполагается

$$\sigma_r|_M = 0. \quad (1.3)$$

Будем считать, что окрестность U инвариантна и для стохастической системы (1.2).

Определение 1.2. Инвариантное многообразие M называется *экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом* (*ЭСК-устойчивым*) для системы (1.2) в U , если при некоторых $K > 0$, $l > 0$ для всех $t \geq 0$ выполняется условие

$$E\|\Delta(x(t))\|^2 \leq K e^{-lt} E\|\Delta(x_0)\|^2, \quad (1.4)$$

где $x(t)$ – решение стохастической системы (1.2) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

Отметим, что для начальных значений $x_0 \in M$ решение $x(t)$ также лежит на M , $\Delta(x(t)) \equiv 0$ и условие (1.4) выполняется тривиально. Это означает, что определение 1.2 никак не связано с динамикой системы (1.2) на самом многообразии, а описывает поведение траекторий вне M .

Изучение компактных инвариантных многообразий динамических систем имеет большую историю и привело к ряду важных математических проблем. Здесь можно отметить задачу анализа структурной устойчивости многообразий при малых возмущениях динамической системы, вопросы топологической эквивалентности двух динамических систем, совпадающих на M (см. [158, 184, 200, 213, 273]). При этом большинство известных результатов как для детерминированного, так и для стохастического случая касается особенностей поведения траекторий лишь на самом многообразии либо получены при дополнительных предположениях, связанных с таким поведением.

Следует подчеркнуть, что в данной работе не делается никаких предположений о поведении решений на самом многообразии M . Целью работы является исследование грубых динамических свойств системы, связанных с экспоненциальным притяжением траекторий к многообразию в его малой окрестности.

В теории динамических систем со случайными возмущениями рассматриваются (см. [30, 45, 62, 119, 133, 233] и библиографию к ним) различные виды стохастической устойчивости: по вероятности, с вероятностью единица; устойчивость в целом и асимптотическая; экспоненциальная p -устойчивость, касающаяся поведения моментов p -го порядка. Большая литература (см. [135, 136, 137, 138, 151] и библиографию к ним) посвяще-

на изучению количественных характеристик асимптотического поведения решений стохастических систем: ляпуновские экспоненты моментов разного порядка, индекс устойчивости.

В данной работе исследуется только один вид стохастической устойчивости – экспоненциальная устойчивость в среднем квадратичном. ЭСК-устойчивость среди вышеназванных является самой сильной. В детерминированном случае экспоненциальная устойчивость положения равновесия была исследована в [52]. Именно для данного типа устойчивости методом функций Ляпунова удалось доказать теорему об устойчивости по первому приближению и получить окончательный результат в форме необходимых и достаточных условий.

Метод стохастических функций Ляпунова, начиная с основополагающих работ [45, 53, 56], является теоретическим фундаментом анализа устойчивости стохастических систем. Этот метод позволил не только распространить на стохастические уравнения базовые конструкции классической теории детерминированной устойчивости, но и получить новые интересные результаты, отражающие особенности, присущие только вероятностным системам.

Метод стохастических функций Ляпунова для случая точки покоя рассматривается давно, достаточно хорошо исследован и имеющиеся здесь результаты (см. [62, 119, 133]) уже составляют глубоко разработанную часть общей теории стохастической устойчивости нелинейных динамических систем. Соответствующие аналоги функций Ляпунова для предельных циклов – орбитальные функции Ляпунова – были введены в [87] для детерминированных систем и применялись в [14, 15, 16, 17, 89, 90, 108, 143, 144, 145, 146, 147] при анализе стохастической устойчивости и чувствительности стохастических нелинейных осцилляторов. Метод вращающихся функций Ляпунова использовался в [96] для получения достаточных признаков суще-

ствования периодических решений внутри торов. Некоторый вариант метода функций Ляпунова, позволяющий получать достаточные условия устойчивости торов, представлен в [110]. Дальнейшая разработка метода функций Ляпунова позволила получить необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости двумерных тороидальных многообразий как в детерминированном [109], так и стохастическом случае [250]. На общие инвариантные многообразия детерминированных систем этот метод был распространен в [253].

В следующем разделе представлена общая теория метода стохастических функций Ляпунова, ориентированная на анализ ЭСК-устойчивости компактных инвариантных многообразий.

1.2. Квадратичные функции Ляпунова. Критерий ЭСК-устойчивости

Рассмотрим в окрестности U многообразия M функцию Ляпунова $v(x)$:

$$v|_U \geq 0, \quad v|_M = 0, \quad v|_{U \setminus M} > 0. \quad (1.5)$$

При доказательстве теорем об устойчивости точек покоя в качестве функций Ляпунова используются стандартные положительно определенные квадратичные формы [35, 52].

В случае инвариантных многообразий соответствующий класс функций Ляпунова определяется следующим образом.

Определение 1.3. Функция $v(x)$ называется M -квадратичной, если при некоторых $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ для всех $x \in U$ выполняются неравенства

$$k_1 \|\Delta(x)\|^2 \leq v(x) \leq k_2 \|\Delta(x)\|^2. \quad (1.6)$$

Рассмотрим производящий дифференциальный оператор [119]

$$Lv(x) = \left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x}(x) \right) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \left(\sigma_r(x), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) \sigma_r(x) \right)$$

исследуемой стохастической системы (1.2). Используя этот оператор и М-квадратичные функции Ляпунова, можно получить следующий критерий, представляющий собой распространение на случай гладких компактных инвариантных многообразий классических результатов [52, 119].

Теорема 1.1. Для ЭСК-устойчивости компактного инвариантного многообразия M системы (1.2) в окрестности U необходимо, чтобы для любой и достаточно, чтобы для некоторой М-квадратичной функции Ляпунова $w(x)$, существовала М-квадратичная функция Ляпунова $v(x)$ такая, что в U справедливо равенство

$$Lv(x) = -w(x). \quad (1.7)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть в некоторой окрестности U многообразия M определена гладкая функция $\gamma(x)$, система (1.2) является инвариантной, а многообразие M – ЭСК-устойчивым. Для каждого $x \in U$ определено решение $x(t) = X(t, x)$ системы (1.2) с начальным условием $x(0) = X(0, x) = x$. При всех $x \in U$ и $t > 0$ решение $x(t) \in U$. Для произвольной М-квадратичной функции $w(x)$ в силу ЭСК-устойчивости M для системы (1.2) величина $Ew(X(t, x))$ при любом $x \in U$ экспоненциально убывает. Это позволяет определить в U функцию

$$v(x) = E \int_0^{\infty} w(X(\tau, x)) d\tau. \quad (1.8)$$

Функция $v(x)$ является функцией Ляпунова: для $v(x)$ выполняются соотношения (1.5) и $v(x)$ – М-квадратична. Для $v(x)$

справедливо равенство

$$Ev(X(t, x)) - v(x) = -E \int_0^t w(X(\tau, x)) d\tau. \quad (1.9)$$

С другой стороны, по формуле Ито имеем

$$Ev(X(t, x)) - v(x) = E \int_0^t Lv(X(\tau, x)) d\tau. \quad (1.10)$$

Из (1.9), (1.10) следует, что

$$\frac{d}{dt} (Ev(X(t, x)))|_{t=0} = Lv(x) = -w(x).$$

Как видим, функции $v(x)$ и $w(x)$ действительно связаны соотношениями (1.7).

Достаточность. Для M -квадратичных функций $v(x)$ и $w(x)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} k_1 \|\Delta(x)\|^2 &\leq v(x) \leq k_2 \|\Delta(x)\|^2 \\ k_3 \|\Delta(x)\|^2 &\leq w(x), \quad k_i > 0, (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.7) и (1.11) следует, что

$$Lv(x) \leq -\frac{k_3}{k_2} v(x). \quad (1.12)$$

Из (1.10) вытекает

$$\frac{d}{dt} (Ev(X(t, x))) = ELv(X(t, x)). \quad (1.13)$$

Из (1.12) и (1.13) следуют неравенства

$$\frac{d}{dt} (Ev(X(t, x))) \leq -\frac{k_3}{k_2} Ev(X(t, x)),$$

$$Ev(X(t, x)) \leq e^{-\frac{k_3}{k_2}t} Ev(x). \quad (1.14)$$

Вновь используя (1.11), получаем неравенства

$$E\|\Delta(X(t, x))\|^2 \leq \frac{k_2}{k_1} e^{-\frac{k_3}{k_2}t} E\|\Delta(x)\|^2,$$

означающие ЭСК-устойчивость многообразия \mathcal{M} . Достаточность доказана.

Теорема 1.1 сводит вопрос об ЭСК-устойчивости системы (1.2) к анализу разрешимости уравнения Ляпунова (1.7) вблизи многообразия \mathcal{M} .

Классическая теория детерминированной устойчивости [86] в случае, когда инвариантным многообразием изучаемой нелинейной системы является точка покоя или предельный цикл, для исследования локальной (вблизи \mathcal{M}) разрешимости соответствующего уравнения Ляпунова привлекает некоторую вспомогательную линейную систему – систему первого приближения. Системой первого приближения служит система линейных дифференциальных уравнений с постоянной (для точки покоя) или периодической (в случае цикла) матрицей. В случае общих инвариантных многообразий роль систем первого приближения играют так называемые линейные расширения [23, 24, 158, 213, 255, 260, 270]. Соответствующая конструкция стохастического линейного расширения, необходимая в анализе ЭСК-устойчивости многообразия \mathcal{M} системы (1.2), вводится в следующем разделе.

1.3. Стохастические линейные расширения. *P*-устойчивость

С каждым $x \in \mathcal{M}$ свяжем T_x – касательное подпространство к \mathcal{M} в точке x и N_x – ортогональное дополнение к T_x в \mathbb{R}^n

(см. в [158] главу 1, раздел 7). Если $\dim \mathcal{M} = s$, то $\dim T_x = s$ и $\dim N_x = n - s$. Важную роль в последующих построениях играет P_x – оператор ортогонального проектирования векторов из \mathbb{R}^n на подпространство N_x .

Рассмотрим локальные свойства функции Ляпунова $v(x)$ вблизи многообразия \mathcal{M} . Запишем разложение $v(x)$ по формуле Тейлора

$$v(x) = v(\gamma) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma), x - \gamma \right) + \frac{1}{2} \left(x - \gamma, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)(x - \gamma) \right) + O(\|x - \gamma\|^3).$$

Для $\gamma = \gamma(x)$ с учетом (1.5) имеем

$$v(x) = \frac{1}{2} \left(\Delta(x), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma(x))\Delta(x) \right) + O(\|\Delta(x)\|^3). \quad (1.15)$$

Первым приближением $v(x)$ в малой окрестности \mathcal{U} многообразия \mathcal{M} является квадратичная форма $(\Delta(x), V(\gamma(x))\Delta(x))$ с матрицей $V(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)$. Здесь играют роль лишь значения $V(x)$ на \mathcal{M} .

Предложение 1.1. Пусть функция $v(x)$ удовлетворяет условию (1.5). Тогда матричная функция $V(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)$ является вырожденной:

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad \forall z \in T_x \quad V(x)z = 0. \quad (1.16)$$

Доказательство. Возьмем произвольные $x \in \mathcal{M}$ и $z \in T_x$. Рассмотрим на многообразии \mathcal{M} параметрически заданную гладкую кривую $y(\varepsilon)$: $y(\varepsilon) \in \mathcal{M}$ при любом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, $y(0) = x$, $\frac{dy}{d\varepsilon}(0) = z$. Из (1.5) следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial x}(y(\varepsilon)) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по ε , получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(y(\varepsilon)) \frac{dy}{d\varepsilon}(\varepsilon) \equiv 0,$$

откуда при $\varepsilon = 0$ сразу следует (1.16).

Рассмотрим пространство Σ , состоящее из всех симметрических $n \times n$ -матричных функций, определенных и достаточно гладких на многообразии \mathcal{M} и удовлетворяющих условию (1.16). Для элементов $V \in \Sigma$ вследствие условия вырожденности (1.16) $\text{rank} V(x) \leq n - s$.

Таким образом, у функции Ляпунова $v(x)$ с условиями (1.5) матрица вторых производных $V(x)$ является элементом пространства Σ .

В теореме 1.1 используются функции Ляпунова с более сильными условиями (1.6). Требование \mathcal{M} -квадратичности у $v(x)$ связано со следующим свойством P -положительной определенности матричной функции $V \in \Sigma$.

Определение 1.4. Матричная функция $V(x) \in \Sigma$ называется *P -положительно определенной*, если выполняется следующее условие:

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad P_x z \neq 0 \Rightarrow (z, V(x)z) > 0.$$

В пространстве Σ мы будем рассматривать конус

$$\mathcal{K} = \{V \in \Sigma \mid V(x) \text{ — неотрицательно определенная матрица } \forall x \in \mathcal{M}\}$$

и множество его внутренних элементов

$$\mathcal{K}_P = \{V \in \Sigma \mid V \text{ — } P\text{-положительно определенная}\}.$$

Отметим (см. ниже утверждения 1.3, 1.4), что конус \mathcal{K} — телесный и нормальный [51].

Предложение 1.2. Если функция $V(x)$ – неотрицательно определенная ($V \in \mathcal{K}$), то при некотором $M > 0$ выполняется неравенство

$$\forall x \in \mathcal{M} \forall z \in \mathbb{R}^n \quad 0 \leq (z, V(x)z) \leq M \|P_x z\|^2. \quad (1.17)$$

Если функция $V(x)$ – P -положительна ($V \in \mathcal{K}_P$), то при некоторых $m > 0, M > 0$ выполняются неравенства

$$\forall x \in \mathcal{M} \forall z \in \mathbb{R}^n \quad m \|P_x z\|^2 \leq (z, V(x)z) \leq M \|P_x z\|^2. \quad (1.18)$$

Доказательство. Рассмотрим для $V(x) \in \mathcal{K}$ сингулярное разложение

$$V(x) = \lambda_1(x)v_1(x)v_1^\top(x) + \dots + \lambda_n(x)v_n(x)v_n^\top(x),$$

где $0 \leq \lambda_1(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$ – собственные значения, а $v_1(x), \dots, v_n(x)$ – соответствующие ортонормированные собственные векторы неотрицательно определенной матрицы $V(x)$ ($^\top$ – знак транспонирования).

Вследствие вырожденности (1.16), считая, что $v_1(x), \dots, v_s(x)$ – базис T_x ($s = \dim T_x$), а $v_{s+1}(x), \dots, v_n(x)$ – базис N_x , имеем $\lambda_1(x) = \dots = \lambda_s(x) = 0$ и

$$V(x) = \sum_{i=s+1}^n \lambda_i(x)v_i(x)v_i^\top(x). \quad (1.19)$$

Для произвольного $z \in \mathbb{R}^n$ из (1.19) следует

$$0 \leq (z, V(x)z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)z_i^2(x), \quad (1.20)$$

где $z_i(x) = (v_i(x), z)$. Из (1.20) для

$$M = \max_{x \in \mathcal{M}} \lambda_n(x)$$

с учетом

$$\|P_x z\|^2 = \sum_{i=s+1}^n z_i^2(x)$$

следует (1.17).

Пусть $V \in \mathcal{K}_P$. Тогда $\lambda_{s+1}(x) > 0$. Положив

$$m = \min_{x \in \mathcal{M}} \lambda_{s+1}(x),$$

из (1.20) получим (1.18).

Предложение 1.3. Для того чтобы функция $v(x)$ была \mathcal{M} -квадратичной в некоторой окрестности U , необходимо и достаточно, чтобы функция $V(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)$ была P -положительной.

Доказательство. Необходимость. Пусть $v(x)$ является \mathcal{M} -квадратичной. Докажем, что $V \in \mathcal{K}_P$. Предположим противное:

$$\exists \gamma \in \mathcal{M} \quad \exists z \in \mathbb{R}^n \quad P_\gamma z \neq 0 \quad \text{и} \quad V(\gamma)z = 0.$$

Возьмем $x = \gamma + \varepsilon z_1$, где $z_1 = P_\gamma z$. Тогда $\gamma(x) = \gamma$, $\Delta(x) = \varepsilon z_1$, $V(\gamma)z = V(\gamma)z_1 = 0$ и, с учетом (1.15), получаем

$$v(x) = O(\|\Delta(x)\|^3).$$

Данное соотношение означает, что функция $v(x)$ не является \mathcal{M} -квадратичной. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $V \in \mathcal{K}_P$. Из (1.15), (1.18) сразу следует, что $v(x)$ в достаточно малой окрестности U будет \mathcal{M} -квадратичной.

Перейдем теперь к линейным расширениям – вспомогательным динамическим системам, отражающим основные особенности эволюции решений исходных нелинейных уравнений вбли-

зи многообразия \mathcal{M} . Поставим в соответствие детерминированной системе (1.1) систему

$$\begin{aligned} dx &= f(x) dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= F(x)z dt, & z &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.21)$$

а стохастической системе (1.2) систему

$$\begin{aligned} dx &= f(x)dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= F(x)zdt + \sum_{r=1}^m S_r(x)zdw_r(t), & z &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где

$$F(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x), \quad S_r(x) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(x).$$

Матричные функции $S_r(x)$, вследствие (1.3), являются вырожденными:

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad \forall z \in T_x \quad S_r(x)z = 0. \quad (1.23)$$

Система (1.21) есть линейное расширение для нелинейной системы (1.1). Систему (1.22) – *стохастическое линейное расширение* для (1.2) – можно рассматривать как семейство всех линеаризаций стохастической системы (1.2) на решениях детерминированной системы (1.1), лежащих в многообразии \mathcal{M} .

Замечание 1.1. Если $x_0 \in \mathcal{M}$ и $z_0 \in T_{x_0}$, то благодаря инвариантности \mathcal{M} для решения $(x(t), z(t))$ детерминированной системы (1.21) с начальным условием $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ при любых $t > 0$ выполняется $x(t) \in \mathcal{M}$ и $z(t) \in T_{x(t)}$. Подчеркнем, что $(x(t), z(t))$, вследствие (1.23), является детерминированным решением и стохастической системы (1.22).

Введенная конструкция стохастического линейного расширения (1.22) будет использована в доказательстве теоремы 1.3 об устойчивости по первому приближению (см. раздел 1.5). Важным моментом теперь является вопрос о том, какой тип

устойчивости должен быть при этом у системы (1.22). Решение $(x(t), 0)$ системы (1.22) не может быть экспоненциально устойчивым в обычном смысле, поскольку всегда имеется решение $(x(t), f(x(t)))$ с неубывающей компонентой $f(x(t))$. Здесь необходимо перейти к более слабому аналогу, используя оператор проектирования P_x .

Определение 1.5. Стохастическое линейное расширение (1.22) называется *P-устойчивым*, если при некоторых $K > 0$, $l > 0$ для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$E\|P_{x(t)}z(t)\|^2 \leq Ke^{-lt} E\|P_{x_0}z_0\|^2,$$

где $(x(t), z(t))$ – решение системы (1.22) с начальным условием $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$, $x_0 \in \mathcal{M}$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$.

В данном определении требуется лишь экспоненциальное убывание вторых моментов проекций $P_{x(t)}z(t)$ компоненты $z(t)$ решений системы (1.22). Понятие *P-устойчивости* было введено в [108] для исследования устойчивости стохастически возмущенных предельных циклов и использовалось в [109, 250, 253] при анализе систем с тороидальными и общими инвариантными многообразиями. Это определение можно трактовать как некоторый вариант давно используемого понятия устойчивости по части переменных [28].

1.4. Функции Ляпунова для стохастических линейных расширений.

Критерий *P-устойчивости*

Анализ *P-устойчивости* стохастических линейных расширений (1.22) будем также проводить на основе метода функций Ляпунова. В качестве функций Ляпунова здесь естественно использовать квадратичные формы вида

$$v(x, z) = (z, V(x)z), \quad x \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

с матричными функциями $V \in \Sigma$. Отметим, что значения производящего дифференциального оператора системы (1.22)

$$L_1 v(x, z) = \left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(F(x)z, \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \left(S_r(x)z, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} S_r(x)z \right)$$

для квадратичной функции Ляпунова $v(x, z) = (z, V(x)z)$ имеют вид

$$L_1(z, V(x)z) = (z, \mathcal{L}[V]z). \quad (1.24)$$

Здесь оператор \mathcal{L} определен следующим образом:

$$\mathcal{L}[V] = \left(f, \frac{\partial V}{\partial x} \right) + F^\top V + VF + \sum_{r=1}^m S_r^\top V S_r. \quad (1.25)$$

Замечание 1.2. Значение оператора $\left(f, \frac{\partial V}{\partial x} \right)$ для $V \in \Sigma$ в точках многообразия \mathcal{M} полностью определяется значениями V на этом многообразии. Действительно, для произвольного решения $x(t)$ системы (1.1), лежащего в многообразии \mathcal{M} ($x(0) = x \in \mathcal{M}$), справедливо

$$\left(f(x(t)), \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \right) = \frac{d}{dt} V(x(t)).$$

Соотношение (1.24) позволяет связать критерий P -устойчивости системы (1.22) непосредственно с оператором \mathcal{L} и соответствующим матричным уравнением (1.26).

Теорема 1.2. Пусть система (1.22) является P -устойчивой. Тогда

а) при любой матрице $W \in \mathcal{K}$ уравнение

$$\mathcal{L}[V] = -W \quad (1.26)$$

имеет в \mathcal{K} единственное решение – матрицу $V \in \mathcal{K}$;

б) если $W \in \mathcal{K}_P$, то $V \in \mathcal{K}_P$.

Пусть для некоторой матрицы $W \in \mathcal{K}_P$ уравнение (1.26) имеет решение $V \in \mathcal{K}_P$. Тогда система линейного расширения (1.22) является P -устойчивой.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x(t) = X(t, x)$, $z(t) = Z(t, x)z$ – решение системы (1.22) с начальными условиями $x(0) = x \in \mathcal{M}$, $z(0) = z \in \mathbb{R}^n$. Здесь $X(t, x)$ – решение детерминированного уравнения (1.1), $Z(t, x)$ – фундаментальная матрица решений линейного стохастического уравнения

$$dz = F(X(t, x))zdt + \sum_{r=1}^m S_r(X(t, x))zdw_r(t).$$

Для произвольной матричной функции $W \in \mathcal{K}$ и соответствующей квадратичной формы $w(x, z) = (z, W(x)z)$ в силу (1.18) и P -устойчивости системы (1.22) величина $Ew(x(t), z(t))$ при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально убывает. Следовательно, определена функция

$$v(x, z) = E \int_0^{\infty} w(x(\tau), z(\tau)) d\tau. \quad (1.27)$$

Функция $v(x, z)$ является по z квадратичной формой

$$v(x, z) = (z, V(x)z) \quad (1.28)$$

с матрицей

$$V(x) = E \int_0^{\infty} Z^T(\tau, x) W(X(\tau, x)) Z(\tau, x) d\tau. \quad (1.29)$$

Поскольку $W \in \Sigma$, то при любых $x \in \mathcal{M}$ и $z \in T_x$ справедливо равенство $W(x)z = 0$. В соответствии с замечанием 1.1, при любом $t > 0$ имеем $z(t) \in T_{x(t)}$, что означает

$$W(x(t))z(t) = 0. \quad (1.30)$$

Из (1.29) следует, что

$$V(x)z = E \int_0^{\infty} Z^{\top}(\tau, x)W(x(\tau))z(\tau)d\tau. \quad (1.31)$$

Из (1.30), (1.31) вытекает равенство $V(x)z = 0$, означающее, что $V(x) \in \Sigma$. Если $W \in \mathcal{K}$, то из (1.29) следует, что $V \in \mathcal{K}$.

Если $W \in \mathcal{K}_P$, то при любом $x \in \mathcal{M}$ и $z \in \mathbb{R}^n$, для которого $P_x z \neq 0$, выполняется неравенство $(z, W(x)z) > 0$. Тогда из (1.27), (1.28) следует неравенство $(z, V(x)z) > 0$, означающее, что $V(x) \in \mathcal{K}_P$.

Докажем теперь, что матрица $V(x)$ из (1.29) является решением уравнения (1.26), и притом единственным.

Для функции $v(x, z)$ из (1.27) справедливо равенство

$$Ev(x(t), z(t)) - v(x, z) = -E \int_0^t w(x(\tau), z(\tau))d\tau. \quad (1.32)$$

С другой стороны, по формуле Ито имеем

$$Ev(x(t), z(t)) - v(x, z) = E \int_0^t L_1 v(x(\tau), z(\tau))d\tau, \quad (1.33)$$

где L_1 – производящий дифференциальный оператор системы (1.22). Из (1.32), (1.33) следуют соотношения

$$\frac{d}{dt} (Ev(x(t), z(t)))|_{t=0} = L_1 v(x, z) = -w(x, z), \quad (1.34)$$

из которых и (1.24) получаем равенство

$$(z, \mathcal{L}[V]z) = -(z, W(x)z),$$

эквивалентное (1.26). Таким образом, матричная функция $V(x)$ из (1.29) является решением уравнения (1.26).

Единственность будем доказывать от противного. Пусть $V_1 \in \Sigma$ и $V_2 \in \Sigma$ – два решения (1.26). Тогда их разность $\Delta(x) = V_2(x) - V_1(x) \in \Sigma$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\mathcal{L}(\Delta) = 0. \quad (1.35)$$

Рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$\delta(x, z) = (z, \Delta(x)z).$$

Из (1.24) и (1.35) вытекает равенство

$$L_1 \delta(x, z) = 0. \quad (1.36)$$

Из формулы Ито и (1.36) следует

$$E\delta(x(t), z(t)) - \delta(x, z) = E \int_0^t L_1 \delta(x(\tau), z(\tau)) d\tau = 0. \quad (1.37)$$

В силу P -устойчивости системы (1.22) при $t \rightarrow \infty$ величина $E\delta(x(t), z(t)) \rightarrow 0$. Следовательно (см. (1.37)), $\delta(x, z) = 0$ при любом $x \in \mathcal{M}$ и $z \in \mathbb{R}^n$. Это означает, что $\Delta(x) \equiv 0$. Единственность доказана.

Достаточность. Пусть $W, V \in \mathcal{K}_P$ связаны соотношением (1.26). Для квадратичных форм

$$v(x, z) = (z, V(x)z), \quad w(x, z) = (z, W(x)z),$$

благодаря P -положительной определенности матриц V и W (см. предложение 1.2) и (1.24), (1.26), при любых $x \in \mathcal{M}$ и $z \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} k_1 \|P_x z\|^2 &\leq v(x, z) \leq k_2 \|P_x z\|^2, \\ k_3 \|P_x z\|^2 &\leq w(x, z), \quad k_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$L_1 v(x, z) = -w(x, z). \quad (1.39)$$

Из (1.38), (1.39) следует, что

$$L_1 v(x, z) \leq -\frac{k_3}{k_2} v(x, z). \quad (1.40)$$

Из (1.33) вытекает

$$\frac{d}{dt} (Ev(x(t), z(t))) = EL_1 v(x(t), z(t)). \quad (1.41)$$

Из (1.40), (1.41) следует

$$\frac{d}{dt} (Ev(x(t), z(t))) \leq -\frac{k_3}{k_2} Ev(x(t), z(t))$$

и далее

$$Ev(x(t), z(t)) \leq e^{-\frac{k_3}{k_2} t} Ev(x, z). \quad (1.42)$$

Вновь используя (1.38), получаем

$$E\|P_{x(t)} z(t)\|^2 \leq \frac{k_2}{k_1} e^{-\frac{k_3}{k_2} t} E\|P_x z\|^2.$$

P -устойчивость системы (1.22) доказана.

Критерий P -устойчивости теоремы 1.2 можно записать в другой форме, связанной с семейством решений $X(t, x)$ детерминированного уравнения (1.1) с условием $X(0, x) = x$.

Действительно, при каждом фиксированном $x \in \mathcal{M}$ решение $x(t) = X(t, x)$ задает параметризацию по t всех точек многообразия \mathcal{M} , лежащих на этом решении. Решение $x(t)$ выделяет на \mathcal{M} инвариантное подмножество

$$\mathcal{M}^x = \{y \mid y = x(t), \quad t \in \mathbb{R}^1\}.$$

Для всех функций, изначально заданных на \mathcal{M} , можно получить на \mathcal{M}^x параметрическое представление

$$F(t) = F(x(t)), \quad S(t) = S(x(t)), \quad P(t) = P_{x(t)},$$

связанное со скалярной переменной $t \in \mathbb{R}^1$. При этом пространства Σ , конусу \mathcal{K} и множеству \mathcal{K}_P соответствуют

$$\begin{aligned}\Sigma^x &= \{V(t) \mid V(t) = V(x(t)), V(x) \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^1\}, \\ \mathcal{K}^x &= \{V(t) \mid V(t) = V(x(t)), V(x) \in \mathcal{K}, t \in \mathbb{R}^1\}, \\ \mathcal{K}_P^x &= \{V(t) \mid V(t) = V(x(t)), V(x) \in \mathcal{K}_P, t \in \mathbb{R}^1\}.\end{aligned}\quad (1.43)$$

Если x – точка покоя, то элементами Σ^x , \mathcal{K}^x , \mathcal{K}_P^x будут постоянные матрицы. Для случая, когда x лежит на цикле, их элементами будут периодические матричные функции. Для тороидального многообразия их элементы – квазипериодические функции.

В силу замечания 1.2 для значений оператора \mathcal{L} из (1.25) на $V(x)$ вдоль решения $x(t)$ справедливо представление

$$\mathcal{L}[V]|_{x=x(t)} = \dot{V}(t) + F^\top(t)V(t) + V(t)F(t) + \sum_{r=1}^m S_r^\top(t)V(t)S_r(t). \quad (1.44)$$

При этом уравнение (1.26) приобретает вид

$$\dot{V}(t) + F^\top(t)V(t) + V(t)F(t) + \sum_{r=1}^m S_r^\top(t)V(t)S_r(t) = -W(t), \quad (1.45)$$

а теорема 1.2 может быть записана в следующей форме.

Пусть система (1.22) является P -устойчивой. Тогда

- а) при любом $x \in \mathcal{M}$ и любой матрице $W \in \mathcal{K}^x$ уравнение (1.45) имеет в \mathcal{K}^x единственное решение – матрицу $V \in \mathcal{K}^x$;
- б) если $W \in \mathcal{K}_P^x$, то $V \in \mathcal{K}_P^x$.

Пусть при каждом $x \in \mathcal{M}$ для некоторой матрицы $W \in \mathcal{K}_P^x$ уравнение (1.45) имеет решение $V \in \mathcal{K}_P^x$. Тогда система (1.22) является P -устойчивой.

1.5. Теорема о стохастической устойчивости по первому приближению

Используя аппарат квадратичных функций Ляпунова, разработанный в разделах 1.2 – 1.4 для общих инвариантных многообразий, и опираясь на полученные в теоремах 1.1 и 1.2 критерии ЭСК-устойчивости многообразия \mathcal{M} нелинейной системы (1.2) и P -устойчивости линейного расширения (1.22), можно вывести стохастический аналог теоремы об устойчивости по первому приближению.

Лемма 1.1. Пусть для некоторой функции $v(x)$ выполняется соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial x}|_{\mathcal{M}} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Lv)|_{\mathcal{M}} = \mathcal{L}[V],$$

где $V(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)$.

Доказательство. Непосредственные вычисления с учетом равенств

$$\frac{\partial v}{\partial x}|_{\mathcal{M}} = 0, \quad \sigma_r|_{\mathcal{M}} = 0$$

дают следующее представление:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Lv)|_{\mathcal{M}} = \left(f, \frac{\partial V}{\partial x}\right) + F^\top V + VF + \sum_{r=1}^m S_r^\top V S_r = \mathcal{L}[V]. \quad (1.46)$$

Лемма 1.2. Если функции $V(x)$ и $W(x) = -\mathcal{L}[V(x)]$ являются P -положительно определенными ($V, W \in \mathcal{K}_P$), то $v(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), V(\gamma(x))\Delta(x))$ и $w(x) = -Lv(x)$ в некоторой окрестности U являются \mathcal{M} -квадратичными.

Доказательство. Пусть $v(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), V(\gamma(x))\Delta(x))$. Поскольку $V \in \mathcal{K}_P$, $\Delta(x) \in N_{\gamma(x)}$, то из (1.18) следует неравенство

$$m\|\Delta(x)\|^2 \leq v(x) \leq M\|\Delta(x)\|^2,$$

означающее M -квадратичность функции $v(x)$. Для доказательства M -квадратичности функции $w(x) = -Lv(x)$ достаточно показать (см. предложение 1.3), что матричная функция $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ является P -положительно определенной. Отметим, что в нашем случае $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) = V(x)$. Из (1.46) вытекают соотношения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{\mathcal{M}} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Lv)|_{\mathcal{M}} = -\mathcal{L}[V] = W,$$

означающие, что функция $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ является P -положительно определенной и, следовательно, $w(x)$ — M -квадратична.

Из теорем 1.1 и 1.2 и лемм 1.1 и 1.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 1.3. Для ЭСК-устойчивости компактного инвариантного многообразия \mathcal{M} нелинейной системы (1.2) в окрестности U необходимо и достаточно, чтобы система (1.22), задающая соответствующее стохастическое линейное расширение, являлась P -устойчивой.

Доказательство. Необходимость. Пусть многообразие \mathcal{M} является ЭСК-устойчивым. Тогда по теореме 1.1 существуют M -квадратичные функции $v(x)$ и $w(x) = -Lv(x)$.

Матричные функции вторых производных $V(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)$, $W(x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x)$ являются (см. предложение 1.3) P -положительно определенными и удовлетворяют (см. лемму 1.1) соотношению $\mathcal{L}V = -W$. Следовательно, по теореме 1.2 система (1.22) является P -устойчивой.

Достаточность. Пусть система (1.22) является P -устойчивой. Тогда по теореме 1.2 существуют P -положительно определенные матрицы $V(x)$, $W(x) = -\mathcal{L}[V(x)]$. Соответствующие им функции $v(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), V(\gamma(x))\Delta(x))$ и $w(x) = -Lv(x)$ являются (см. лемму 1.2) M -квадратичными в U . Следовательно, по теореме 1.1 многообразие M является ЭСК-устойчивым. Теорема доказана.

Данный результат, опубликованный в [251], является естественным обобщением известных теорем об устойчивости по первому приближению [35, 52, 86].

Благодаря теоремам 1.1, 1.2 и 1.3, исследование ЭСК-устойчивости многообразия M сводится к исследованию разрешимости уравнения $\mathcal{L}V = -W$ в классе P -положительно определенных матриц \mathcal{H}_P . Решать вопрос об устойчивости, напрямую исследуя разрешимость таких уравнений, часто бывает неудобно, особенно в случаях, близких к критическим. Здесь возможен подход, позволяющий свести исследование устойчивости к оценке спектрального радиуса некоторого положительного оператора.

1.6. Спектральный критерий

Представим оператор \mathcal{L} из (1.25) в виде суммы

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{S}$$

операторов \mathcal{A} и \mathcal{S} , задаваемых на элементах пространства Σ (пространство Σ определено в разделе 1.4.) равенствами

$$\mathcal{A}[V] = \left(f, \frac{\partial V}{\partial x} \right) + F^\top V + VF, \quad \mathcal{S}[V] = \sum_{r=1}^m S_r^\top V S_r.$$

При этом уравнение (1.26) может быть записано в виде

$$\mathcal{A}[V] + \mathcal{S}[V] = -W. \quad (1.47)$$

В предположении P -устойчивости детерминированной системы (1.21) из теоремы 1.2 следует существование обратного оператора \mathcal{A}^{-1} , причем \mathcal{A}^{-1} – отрицательный на конусе \mathcal{K} . Умножая (1.47) на \mathcal{A}^{-1} , получим

$$V - \mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}[W], \quad (1.48)$$

где оператор $\mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$ как произведение положительных операторов $-\mathcal{A}^{-1}$ и \mathcal{S} также является положительным.

Теперь с помощью теории положительных операторов [51] вопрос о P -устойчивости стохастической системы (1.22) сводится к оценке спектрального радиуса $\rho(\mathcal{P})$ оператора \mathcal{P} . Для этого нам потребуется доказать некоторые свойства конуса \mathcal{K} .

Свойства конуса \mathcal{K}

Введем в пространстве Σ симметрических $n \times n$ -матричных функций, определенных и достаточно гладких на многообразии \mathcal{M} и удовлетворяющих условию (1.16), норму

$$\|V\| = \max_{x \in \mathcal{M}} \sqrt{\text{tr}(V^2(x))}. \quad (1.49)$$

Утверждение 1.1. Введенная в (1.49) операция $\|\cdot\|$ удовлетворяет аксиомам нормы:

- 1) $\|V\| = 0 \Leftrightarrow V = 0$,
- 2) $\|\lambda V\| = |\lambda| \|V\|$,
- 3) $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$.

Доказательство. Свойства 1) и 2), очевидно, выполняются. Из соотношений, использующих неравенство Коши – Буняковского,

$$\begin{aligned} \text{tr}(V + W)^2 &= \text{tr}(V^2 + VW + WV + W^2) \leq \\ &\leq \text{tr}(V^2) + 2\sqrt{\text{tr}(V^2)}\sqrt{\text{tr}(W^2)} + \text{tr}(W^2) = \left(\sqrt{\text{tr}(V^2)} + \sqrt{\text{tr}(W^2)}\right)^2 \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned}\|V + W\|^2 &= \max_{x \in \mathcal{M}} \text{tr}(V + W)^2 \leq \max_{x \in \mathcal{M}} \left(\sqrt{\text{tr}(V^2)} + \sqrt{\text{tr}(W^2)} \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\max_{x \in \mathcal{M}} \sqrt{\text{tr}(V^2)} + \max_{x \in \mathcal{M}} \sqrt{\text{tr}(W^2)} \right)^2 = (\|V\| + \|W\|)^2,\end{aligned}$$

откуда вытекает 3).

В нормированном пространстве Σ рассмотрим конус \mathcal{K} неотрицательно определенных матриц и отношение порядка, задаваемого следующим определением.

Определение 1.6. Положим $V \preceq W$, если соответствующая разность $W - V \in \mathcal{K}$.

Для проверки неравенства $V \preceq W$ можно использовать

Утверждение 1.2. Для того чтобы $V \preceq W$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall x \in \mathcal{M} \forall Q(x) \in \mathcal{K} \quad \text{tr}(V(x)Q(x)) \leq \text{tr}(W(x)Q(x)). \quad (1.50)$$

Рассмотрим некоторые свойства конуса \mathcal{K} [51].

Определение 1.7. Конус \mathcal{K} называется *телесным*, если он содержит шар ненулевого радиуса.

Определение 1.8. Конус \mathcal{K} называется *нормальным*, если из $V \preceq W$ следует $\|V\| \leq \|W\|$.

Утверждение 1.3. Конус \mathcal{K} – телесный.

Доказательство. Рассмотрим в Σ шар

$$\mathcal{B} = \{ V \in \Sigma \mid \|V\| \leq 1 \}.$$

Для любого $V \in \mathcal{B}$, используя сингулярное разложение

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i(x) v_i^\top(x),$$

где $\lambda_i(x)$ – собственные значения, а $v_i(x)$ – ортонормированный набор собственных векторов матрицы $V(x)$, получаем

$$\|V\|^2 = \max_{x \in \mathcal{M}} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(x) \leq 1,$$

откуда следует

$$\forall i \quad \forall x \in \mathcal{M} \quad |\lambda_i(x)| \leq 1. \quad (1.51)$$

Для суммы P_x и $V(x)$ справедливо разложение

$$P_x + V(x) = \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i(x)) v_i(x) v_i^\top(x).$$

Из (1.51) следует, что $P_x + V(x) \in \mathcal{K}$. Таким образом, элемент P_x лежит в конусе \mathcal{K} вместе с шаром B и, следовательно, конус \mathcal{K} – телесный.

Утверждение 1.4. Конус \mathcal{K} – нормальный.

Доказательство. Пусть $V \preceq W$. Поочередно полагая в (1.50) $Q = V$ и $Q = W$, получаем соотношения

$$\text{tr}(V^2(x)) \leq \text{tr}(V(x)W(x)) \leq \text{tr}(W^2(x)),$$

из которых вытекает требуемое неравенство $\|V\| \leq \|W\|$.

Теперь критерий P -устойчивости можно записать в следующем виде.

Теорема 1.4. Для того чтобы стохастическая система (1.22) была P -устойчива, необходимо и достаточно, чтобы

- а) детерминированная система (1.21) была P -устойчива;
- б) выполнялось неравенство

$$\rho(\mathcal{P}) < 1. \quad (1.52)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1.22) P -устойчива. Тогда будет P -устойчива система (1.21), что обеспечивает существование оператора A^{-1} .

Описанным выше способом из соотношения (1.26) при некоторых $V \in \mathcal{K}_P$, $W \in \mathcal{K}_P$ (см. теорему 1.2) можно получить соотношение (1.48), из которого, при учете $-A^{-1}[W] \in \mathcal{K}_P$, следует, что $V - \mathcal{P}[V] \in \mathcal{K}_P$. Оператор \mathcal{P} , как произведение положительных операторов $-A^{-1}$ и \mathcal{S} , также является положительным. Благодаря нормальности и телесности конуса \mathcal{K} , по теореме 16.7 из [51] следует неравенство (1.52).

Достаточность. P -устойчивость системы (1.21), как уже отмечалось, обеспечивает существование оператора A^{-1} , а вместе с ним и оператора \mathcal{P} . В условиях (1.52) у оператора \mathcal{R} , определяемого равенством

$$\mathcal{R}[V] = V - \mathcal{P}[V],$$

существует обратный оператор \mathcal{R}^{-1} , причем

$$\mathcal{R}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^k.$$

Оператор \mathcal{R} также является положительным. Это означает, что для $W \in \mathcal{K}_P$ матрица $V = \mathcal{R}^{-1}[-A^{-1}[W]] \in \mathcal{K}_P$ и является решением уравнения (1.48). Отсюда, в силу эквивалентности (1.48) и (1.26), следует, что $V \in \mathcal{K}_P$ удовлетворяет уравнению (1.26). Следовательно (см. теорему 1.2), система (1.22) будет P -устойчива.

Замечание 1.3. Спектральный радиус $\rho = \rho(\mathcal{P}) \neq 0$ задает бифуркационное значение $\varepsilon^* = \sqrt{1/\rho}$ интенсивности $\varepsilon \geq 0$ случайных помех для системы

$$\begin{aligned} dx &= f(x) dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= F(x)zdt + \varepsilon \sum_{r=1}^m S_r(x)zdw_r(t), & z &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Эта система устойчива для всех значениях $\varepsilon < \varepsilon^*$ и неустойчива при всех $\varepsilon \geq \varepsilon^*$. Случай $\rho = 0$ означает устойчивость системы при любых $\varepsilon \geq 0$.

Замечание 1.4. В случае, когда точное отыскание спектрального радиуса ρ затруднительно, представляют интерес и его оценки:

$$\rho_1 < \rho < \rho_2.$$

Действительно, неравенство $\rho_2 < 1$ позволяет получить достаточное, а $\rho_1 < 1$ – необходимое условие устойчивости. При этом разность $\rho_2 - \rho_1$ может служить мерой грубости данных условий устойчивости.

Спектральный критерий теоремы 1.4 является распространением на случай общих инвариантных многообразий аналогичных результатов, полученных ранее для случаев точки покоя [107], циклов [108], торов [250].

Аналогичный подход, связанный с использованием спектрального критерия в анализе стохастической устойчивости дискретных динамических систем, представлен в [254].

Теория, представленная теоремами 1.1 – 1.4, позволяет сформулировать следующий общий подход к исследованию стохастической устойчивости. На основании доказанных теорем анализ ЭСК-устойчивости многообразия M нелинейной стохастической системы (1.2) сводится к оценке спектрального радиуса ρ некоторого линейного положительного оператора \mathcal{P} .

Конструктивность данного подхода определяется тем, насколько эффективно решается последняя задача. Во многих важных частных случаях спектральный радиус находится просто. Для общих случаев получение эффективных численных методов, позволяющих находить оценки для $\rho(\mathcal{P})$, связано с использованием специфики оператора \mathcal{P} . Здесь важным моментом является его положительность. Класс положительных операторов достаточно хорошо изучен. Спектральные свойства таких операторов исследовались многими авторами, в том числе и с точки зрения оценки спектрального радиуса. Краткий, но достаточно глубокий обзор теории положительных операторов

ров и возможных методов приближенного отыскания их спектральных радиусов имеется в монографии [51].

1.6.1. Системы с шумами второго типа. Оценки спектрального радиуса оператора \mathcal{P}

Рассмотрим стохастическую систему

$$\begin{aligned} dx &= f(x) dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= F(x)zdt + \sqrt{z^\top Q(x)z}d\eta, & z &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где $\eta(t)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами

$$E d\eta = 0, \quad E d\eta(d\eta)^\top = G(x)dt, \quad Q \in \mathcal{K}, \quad G \in \mathcal{K}.$$

Уравнение (1.53) нелинейно по z . Однако это не мешает воспользоваться теорией, изложенной выше для линейных систем (1.22). Дело в том, что здесь, по сути, требуется линейность уравнений для вторых моментов. Это имеет место и для систем вида (1.53).

В разложении оператора Ляпунова $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{S}$, соответствующего системе (1.53), связанный со случайными возмущениями оператор \mathcal{S} имеет простую структуру

$$\mathcal{S}[V] = \text{tr}(VG) \cdot Q. \quad (1.54)$$

Замечание 1.5. Система (1.53) содержит всего один мультипликативный (векторный) шум. Интенсивность этого шума определяется скалярной величиной $\|z\|_Q = \sqrt{z^\top Qz}$ – нормой отклонения состояния системы z от начала координат. Шумы такого типа (второго типа) были введены в [105] и рассматривались в [107, 108, 250].

Во многих важных случаях форма шумов второго типа более естественна. Так, например, рассмотрим случай уравнения

n -го порядка

$$y^{(n)} = g(y, y', \dots, y^{(n-1)}) + \sum_{r=1}^m \beta_r(y, y', \dots, y^{(n-1)}) \dot{w}_r(t).$$

Это уравнение можно записать в форме системы (1.2), если взять

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \quad x_2 = y', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)} \\ f_1 &= x_2, \quad \dots, \quad f_{n-1} = x_n, \quad f_n = g(x_1, \dots, x_n) \\ \sigma_r &= \beta_r(x_1, \dots, x_n) \varphi, \quad \varphi = (0, \dots, 0, 1)^\top. \end{aligned}$$

Предполагается, что эта система имеет инвариантное многообразие \mathcal{M} и $\beta_r|_{\mathcal{M}} = 0$. Соответствующей стохастической системой линейного расширения в классе систем с шумами первого типа здесь будет

$$\begin{aligned} dx &= f(x) dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= F(x)z dt + \sum_{r=1}^m \varphi q_r^\top(x) z dw_r(t), & z &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.55)$$

где

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad q_r^\top = \left(\frac{\partial \beta_r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \beta_r}{\partial x_n} \right).$$

Из условия $\beta_r|_{\mathcal{M}} = 0$ следует, что

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad \forall z \in T_x \quad q_r^\top(x)z = 0. \quad (1.56)$$

Все действующие шумы первого типа в системе (1.55) можно заменить одним шумом второго типа и в качестве системы

линейного расширения рассматривать систему (1.53) с параметрами

$$Q(x) = \sum_{r=1}^m q_r(x) q_r^\top(x), \quad \eta(t) = w(t) \varphi(x),$$

$$\varphi(x) = P_x \varphi, \quad G(x) = \varphi(x) \varphi^\top(x) \in \mathcal{K},$$

где $w(t)$ – скалярный стандартный винеровский процесс. Из (1.56) следует, что $Q \in \mathcal{K}$.

Возможность в случае уравнения n -го порядка заменить все действующие параметрические помехи одним шумом второго типа приводит к существенному упрощению анализа стохастической устойчивости, связанному с вырождением (см. ниже лемму 1.5) оператора \mathcal{P} в спектральном критерии теоремы 1.4 (см. ниже теорему 1.5). Указанное обстоятельство проясняет природу неожиданной эффективности критериев устойчивости, полученных в [92] для уравнения n -го порядка и в [66, 67, 68] для некоторых более общих случаев.

Общий прием, связанный с заменой шумов на эквивалентные, использовался в [74].

Замечание 1.6. Рассмотрим случай, когда многообразие \mathcal{M} имеет размерность

$$\dim(\mathcal{M}) = n - 1 \quad (\text{codim}(\mathcal{M}) = 1).$$

В этом случае $\dim(N_x) = 1$, $\text{rang}(P_x) = 1$, у матриц $S_r(x)$ системы (1.22), вследствие (1.23), $\text{rang}(S_r) \leq 1$ и возможна факторизация

$$P_x = p(x) p^\top(x), \quad S_r(x) = g_r(x) p^\top(x), \quad g_r(x) = S_r(x) p(x).$$

Здесь $p(x)$ и $g_r(x)$ – n -вектор-функции, определенные на \mathcal{M} , а $p(x)$ нормирована и ортогональна \mathcal{M} в точке x ($p(x) \in N_x$). Благодаря такой структуре матриц S_r , все m шумов первого

типа в системе (1.22) можно заменить одним шумом второго типа. Тогда от системы (1.22) можно перейти к системе (1.53), у которой $Q(x) = P_x$, а n -мерный винеровский процесс $\eta(t)$ связан со скалярными винеровскими процессами $w_r(t)$ соотношением: $\eta = \sum_{r=1}^m w_r g_r$. При этом $G(x) = \sum_{r=1}^m g_r(x) g_r^T(x)$. Возможность перехода к эквивалентному линейному расширению с одним шумом второго типа в случае $\text{codim}(\mathcal{M}) = 1$ позволяет получить эффективные параметрические критерии устойчивости как для цикла на плоскости (раздел 1.8), так и для 2-тора в трехмерном пространстве (раздел 1.9).

Мажоранты для шумов

На практике при исследовании реальных систем зачастую параметры шумов точно неизвестны. Обычно имеющаяся информация позволяет лишь судить о том, какие уравнения и параметры, описывающие интересующий нас объект, подвержены действию шумов, а какие нет, и от каких координат вектора состояния системы эти шумы зависят в большей степени, а от каких – в меньшей. При этом для интенсивностей действующих возмущений могут быть известны лишь довольно грубые оценки. Поэтому большой теоретический и практический интерес представляют грубые достаточные условия, которые позволили бы в указанных обстоятельствах по возможности более простым способом ответить на вопрос об устойчивости системы.

Удобные достаточные условия можно получать, используя рассматриваемую ниже конструкцию мажорант.

Один шум второго типа системы (1.53) может играть роль мажоранты сразу для нескольких шумов первого типа в системе (1.22). При построении соответствующей мажоранты используются следующие леммы.

Лемма 1.3. Для любой матрицы V , принадлежащей кону-

су \mathcal{K} , справедливо соотношение

$$V(x) \preccurlyeq \operatorname{tr}(V(x)P_x)P_x. \quad (1.57)$$

Доказательство. Сингулярное разложение для $V(x) \in \mathcal{K}$ имеет вид (см. (1.19))

$$V(x) = \sum_{i=s+1}^n \lambda_i(x) v_i(x) v_i^\top(x).$$

Здесь $0 \leq \lambda_{s+1}(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$ – собственные значения $V(x)$, а $v_{s+1}(x), \dots, v_n(x)$ – соответствующие собственные векторы, составляющие ортонормированный базис N_x .

Поскольку $\operatorname{tr}(V) = \sum_{i=s+1}^n \lambda_i$, $P_x = \sum_{i=s+1}^n v_i(x) v_i^\top(x)$, то справедливо $V(x) \preccurlyeq \operatorname{tr}(V(x))P_x$, откуда с учетом $V(x) = V(x)P_x$ следует соотношение (1.57).

Лемма 1.4. При любой матрице $V \in \mathcal{K}$ справедливы соотношения

$$\mathcal{S}[V] = \sum_{r=1}^m S_r^\top V S_r \preccurlyeq \operatorname{tr}(V P_x) \sum_{r=1}^m S_r^\top P_x S_r, \quad (1.58)$$

$$\mathcal{S}[V] = \sum_{r=1}^m S_r^\top V S_r \preccurlyeq \operatorname{tr}(V \sum_{r=1}^m S_r P_x S_r^\top) P_x. \quad (1.59)$$

Доказательство. Соотношение (1.58) сразу следует из (1.57) и монотонности оператора \mathcal{S} . Для доказательства (1.59) рассмотрим для \mathcal{S} сопряженный оператор

$$\mathcal{S}^*[W] = \sum_{r=1}^m S_r W S_r^\top.$$

Оператор \mathcal{S}^* – положительный и монотонный. Из неравенства $W(x) \preccurlyeq \operatorname{tr}(W(x)P_x)P_x$ (см. лемму 1.3) для любого $W \in \mathcal{K}$ вытекают соотношения

$$\mathcal{S}^*[W] \preccurlyeq \operatorname{tr}(W P_x) \mathcal{S}^*[P_x],$$

$$\text{tr}(\mathcal{S}[V]W) = \text{tr}(V\mathcal{S}^*[W]) \preceq \text{tr}(V\mathcal{S}^*[P_x])\text{tr}(WP_x),$$

из которых следует (1.59). Лемма 1.4 доказана.

Как видим, для любых матриц S_r можно указать такие матрицы G и Q , что при любом $V \in \mathcal{K}$ выполняется неравенство

$$\mathcal{S}[V] = \sum_{r=1}^m S_r^\top V S_r \preceq \text{tr}(VG)Q. \quad (1.60)$$

Неравенство (1.60) в силу леммы 1.4 справедливо как для пары $G = P_x$, $Q = \sum_{r=1}^m S_r^\top P_x S_r$, так и для пары $G = \sum_{r=1}^m S_r P_x S_r^\top$, $Q = P_x$.

Неравенство (1.60) означает, что оператор $\bar{\mathcal{S}}[V] = \text{tr}(VG)Q$, задаваемый параметрами G и Q шумов второго типа системы (1.53), является мажорантой для оператора $\mathcal{S}[V] = \sum_{r=1}^m S_r^\top V S_r$, соответствующего шумам первого типа системы (1.22)

$$\mathcal{S}[V] \preceq \bar{\mathcal{S}}[V].$$

При этом спектральные радиусы операторов $\mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$ и $\bar{\mathcal{P}} = -\mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{S}}$ будут связаны неравенством $\rho(\mathcal{P}) \leq \rho(\bar{\mathcal{P}})$ и, соответственно, из P -устойчивости системы (1.53) будет следовать P -устойчивость системы (1.22).

Специфика оператора \mathcal{S} (см. (1.54)) для системы (1.53) с шумом второго типа приводит к упрощению структуры оператора $\mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$. В этом случае значения оператора \mathcal{P} вычисляются по формуле

$$\mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}[\text{tr}(VG)Q]. \quad (1.61)$$

Спектральный радиус $\rho = \rho(\mathcal{P})$ положительного оператора \mathcal{P} является (см. теорему 11.5 из [51]) собственным значением для соответствующего собственного вектора $V \in \mathcal{K}$.

Из соотношений

$$\rho V = \mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}[\mu Q], \quad \mu = \text{tr}(VG)$$

следует равенство

$$\rho \cdot \mu = -\text{tr}((\mathcal{A}^{-1}[\mu Q])G). \quad (1.62)$$

Это равенство означает, что $\mu = \text{tr}(VG)$ является собственной функцией с тем же самым собственным значением ρ для оператора \mathcal{B} :

$$\mathcal{B}[\mu] = -\text{tr}((\mathcal{A}^{-1}[\mu Q])G).$$

Оператор \mathcal{B} определен на пространстве Σ^1 непрерывно дифференцируемых скалярных функций. Оператор \mathcal{B} является положительным на конусе $\mathcal{K}^1 = \{\varphi \in \Sigma^1 | \varphi(x) \geq 0\}$ с внутренностью $\mathcal{K}_P^1 = \{\varphi \in \Sigma^1 | \varphi(x) > 0\}$.

Лемма 1.5. Операторы \mathcal{P} и \mathcal{B} имеют одинаковый спектральный радиус:

$$\rho(\mathcal{P}) = \rho(\mathcal{B}).$$

Доказательство. Как было показано выше, спектральный радиус $\rho(\mathcal{P})$ является собственным значением оператора \mathcal{B} . Следовательно, $\rho(\mathcal{P}) \leq \rho(\mathcal{B})$. Пусть $\mu \in \mathcal{K}_P^1$ есть собственная функция оператора \mathcal{B} , соответствующая собственному значению $\rho = \rho(\mathcal{B})$. Для матрицы $V = -\mathcal{A}^{-1}[\mu Q]$ из (1.62) следует соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[V] &= -\mathcal{A}^{-1}S[-\mathcal{A}^{-1}[\mu Q]] = -\mathcal{A}^{-1}[\text{tr}(-\mathcal{A}^{-1}[\mu Q] \cdot G)Q] = \\ &= -\mathcal{A}^{-1}[\rho \mu Q] = -\rho \mathcal{A}^{-1}[\mu Q] = \rho V. \end{aligned}$$

Это означает, что ρ является собственным значением оператора \mathcal{P} и поэтому $\rho(\mathcal{B}) \leq \rho(\mathcal{P})$. Таким образом, $\rho(\mathcal{B}) = \rho(\mathcal{P})$.

Благодаря лемме 1.5, в анализе P -устойчивости системы (1.53) оператор \mathcal{P} (см. теорему 1.4) можно заменить на более

простой оператор B . Это позволяет сделать спектральный анализ устойчивости более конструктивным. Данное обстоятельство впервые было замечено и использовано в [105, 107] при решении задачи об устойчивости и стабилизации линейных стохастических систем с постоянными коэффициентами.

В работах [108, 250] соответствующие варианты леммы 1.5 послужили основой при выводе параметрических критериев ЭСК-устойчивости стохастически возмущенных циклов и торов.

1.7. Устойчивость точки покоя

Рассмотрим здесь простейший случай, когда системы (1.1), (1.2) имеют инвариантное многообразие \mathcal{M} , состоящее из единственной точки $\bar{x} : \mathcal{M} = \{\bar{x}\}$. Это означает, что функция $x(t) = \bar{x}$ – решение систем (1.1), (1.2) – является положением равновесия. В этом случае вопрос об ЭСК-устойчивости равновесия \bar{x} системы (1.2) по теореме 1.3 сводится к исследованию ЭСК-устойчивости тривиального решения $z = 0$ линейной системы первого приближения

$$dz = Fzdt + \sum_{r=1}^m S_r z dw_r(t) \quad (1.63)$$

с постоянными коэффициентами

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S_r = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(\bar{x}).$$

Системы вида (1.63), традиционно называемые системами с мультипликативными шумами, исследовались в [154, 187, 225, 226].

Операторы \mathcal{A} и \mathcal{S} , действуя в пространстве Σ постоянных симметрических $n \times n$ -матриц, имеют вид

$$\mathcal{A}[V] = F^\top V + VF, \quad \mathcal{S}[V] = \sum_{r=1}^m S_r^\top V S_r.$$

Будем предполагать, что матрица F является устойчивой (ее спектр лежит в левой полуплоскости). При этом существует оператор \mathcal{A}^{-1} с интегральным представлением

$$\mathcal{A}^{-1}[V] = - \int_0^{\infty} e^{F^T t} V e^{F t} dt.$$

Рассмотрим теперь соответствующую систему с мультипликативными шумами второго типа

$$dz = Fzdt + \sqrt{z^T Q z} d\eta, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (1.64)$$

где $\eta(t)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами

$$E d\eta = 0, \quad E d\eta (d\eta)^T = G dt, \quad Q, G \in \mathcal{K},$$

а конус \mathcal{K} составляют постоянные симметрические неотрицательно определенные $n \times n$ -матрицы. Для такой системы операторы \mathcal{S} и \mathcal{P} имеют вид (см. (1.54), (1.61)):

$$\mathcal{S}[V] = \text{tr}(VG) \cdot Q, \quad \mathcal{P}[V] = -\text{tr}(VG) \mathcal{A}^{-1}[Q]. \quad (1.65)$$

Пусть $\rho = \rho(\mathcal{P})$ – собственное значение, а V – ему соответствующий собственный вектор оператора \mathcal{P} . Тогда

$$-\text{tr}(VG) \mathcal{A}^{-1}[Q] = \rho V.$$

Умножив обе части этого равенства справа на G и вычислив от обеих частей след, получим

$$-\text{tr}(VG) \text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[Q]G) = \rho \text{tr}(VG).$$

Из этого соотношения следует явная формула

$$\rho(\mathcal{P}) = -\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[Q]G).$$

Полученное равенство означает, что оператор \mathcal{B} из леммы 1.5 в случае точки покоя вырождается в скалярный множитель: $\mathcal{B} = -\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[Q]G)$. Таким образом, в данном случае спектральный радиус оператора \mathcal{P} находится совсем просто:

$$\rho(\mathcal{P}) = \text{tr}(VG), \quad (1.66)$$

где матрица V – решение матричного уравнения Ляпунова

$$\mathcal{A}[V] = F^{\top}V + VF = -Q.$$

При этом неравенство $\text{tr}(VG) < 1$, в силу теорем 1.3, 1.4, является необходимым и достаточным условием ЭСК-устойчивости точки покоя \bar{x} нелинейной стохастической системы (1.2).

Для величины $\rho(\mathcal{P})$ из (1.66) возможна следующая вероятностная интерпретация. В пространстве Σ введем скалярное произведение

$$\langle V, W \rangle = \text{tr}(VW).$$

Здесь сопряженным к \mathcal{A} будет оператор \mathcal{A}^* вида

$$\mathcal{A}^*[W] = FW + WF^{\top}.$$

Из соотношений

$$\langle V, G \rangle = -\langle \mathcal{A}^{-1}[Q], G \rangle = -\langle Q, (\mathcal{A}^*)^{-1}[Q] \rangle$$

следует, что

$$\rho(\mathcal{P}) = \langle Q, D \rangle = \text{tr}(QD),$$

где D – решение сопряженного уравнения

$$\mathcal{A}^*[D] = FD + DF^{\top} = -G. \quad (1.67)$$

Заметим, что матрица D – решение уравнения (1.67) – является матрицей вторых моментов стационарно распределенного состояния z_s системы с аддитивными шумами

$$dz = Fzdt + d\eta. \quad (1.68)$$

Существование такого стационарно распределенного состояния вытекает из устойчивости матрицы F [282]. Формально система (1.68) получается из (1.64) заменой мультипликативного коэффициента $\sqrt{z^\top Q z}$ на единицу. При этом спектральный радиус оператора \mathcal{P} получает новое вероятностное представление

$$\rho(\mathcal{P}) = E(z_s^\top Q z_s). \quad (1.69)$$

Равенство (1.69) позволяет записать общий критерий теоремы 1.4 для системы (1.64) в следующем виде.

Теорема 1.5. Для того чтобы решение $z = 0$ системы (1.64) было ЭСК-устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы

а) матрица F была устойчива;

б) для стационарно распределенного состояния z_s системы с аддитивными шумами (1.68) выполнялось неравенство

$$E(z_s^\top Q z_s) < 1.$$

Данная теорема вопрос об устойчивости системы с одним мультипликативным шумом (1.64) сводит к отысканию значения квадратичного критерия, вычисляемого для более простой системы (1.68), полученной из (1.64) заменой мультипликативного шума на соответствующий аддитивный. Возможно распространение подобного результата на случай системы с несколькими мультипликативными шумами. В [107] найден подходящий критерий и предложен алгоритм последовательного рекуррентного анализа устойчивости.

Величина квадратичного критерия $E(z_s^\top Q z_s)$ является мерой разброса стационарного решения z_s системы с аддитивным шумом (1.68).

Исследование разброса случайных траекторий вокруг точек покоя, циклов, торов и общих инвариантных многообразий является предметом детального анализа в главе 2. Представленный здесь результат для случая точки покоя демонстрирует

глубокую связь вопросов устойчивости (глава 1) и чувствительности (глава 2).

Шумы второго типа системы (1.64), как уже отмечалось в разделе 1.6, можно использовать в качестве мажоранты для шумов первого типа системы (1.63) и получать с помощью критерия теоремы 1.5 для (1.63) простые достаточные условия ЭСК-устойчивости. Действительно, при $G = I$ (I – единичная матрица), $Q = \sum_{r=1}^m S_r^\top S_r$ для оператора S системы (1.63) выполняется (см. лемму 1.4 и (1.60)) неравенство

$$S[V] = \sum_{r=1}^m S_r^\top V S_r \leq \text{tr}(VG)Q,$$

из которого следует оценка сверху спектрального радиуса $\rho(\mathcal{P})$ оператора $\mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}S$:

$$\rho(\mathcal{P}) \leq E(z_s^\top Q z_s) = \text{tr}(QD),$$

где матрица D является решением уравнения

$$FD + DF^\top = -I.$$

Неравенство $\text{tr}(QD) < 1$ является здесь достаточным условием ЭСК-устойчивости системы (1.63) [254].

Отметим, что критерий теоремы 1.5, представленный здесь как следствие общих результатов теории устойчивости инвариантных многообразий, был впервые опубликован в работе [107], где служил теоретической основой при решении задачи стабилизации в условиях неполной информации. Аналогичный критерий для случая дискретных стохастических систем был получен в [254], где применялся при построении областей устойчивости численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений.

Критерий устойчивости теоремы 1.5 позволяет эффективно решать соответствующую задачу стабилизации (см. ниже теорему 3.2).

Пример

Рассмотрим стохастический осциллятор

$$\ddot{x} + (b + \beta \dot{w}_2)\dot{x} + (a + \alpha \dot{w}_1)x = 0$$

с параметрами a и b , испытывающими случайные возмущения интенсивности α и β соответственно, w_1 , w_2 – некоррелированные стандартные винеровские процессы. Замена $\dot{x} = y$ приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax - by - \alpha x \dot{w}_1 - \beta y \dot{w}_2. \end{cases} \quad (1.70)$$

Эта система эквивалентна системе с одним мультипликативным шумом второго типа

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax - by + \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2} \dot{w}, \end{cases} \quad (1.71)$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Следуя критерию теоремы 1.5, рассмотрим для (1.71) соответствующую систему с аддитивным шумом

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax - by + \dot{w}. \end{cases} \quad (1.72)$$

При любых $a > 0$, $b > 0$ матрица $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$ этой системы устойчива, что гарантирует у (1.72) существование стационарных вторых моментов

$$E(x_s^2) = \frac{1}{2ab}, \quad E(x_s y_s) = 0, \quad E(y_s^2) = \frac{1}{2b}.$$

По теореме 1.5 необходимым и достаточным условием ЭСК-устойчивости равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (1.71), а, значит, и (1.70) является неравенство

$$E(\alpha^2 x_s^2 + \beta^2 y_s^2) = \frac{\alpha^2}{2ab} + \frac{\beta^2}{2b} < 1.$$

При фиксированных $a > 0$, $b > 0$ область допустимых значений интенсивностей α и β действующих шумов, при которых система сохраняет устойчивость, является эллипсом. Размеры эллипса характеризуют запас устойчивости. Увеличение коэффициентов a и b ведет к увеличению запаса устойчивости.

1.8. Устойчивость цикла

Рассмотрим случай, когда инвариантным многообразием \mathcal{M} систем (1.1), (1.2) является предельный цикл. Такой цикл может быть задан T -периодическим решением $x = \xi(t)$, где начальное значение $x_0 = \xi(0)$ – фиксированная точка цикла.

Решение $\xi(t)$ на интервале $[0, T)$ задает естественную параметризацию точек цикла: $\mathcal{M} = \{\xi(t) | 0 \leq t < T\}$. В этом случае вопрос об ЭСК-устойчивости цикла \mathcal{M} системы (1.2) по теореме 1.3 сводится к исследованию динамики проекций $P(t)z(t)$ решений $z(t)$ (P -устойчивость) линейной системы первого приближения

$$dz = F(t)zdt + \sum_{r=1}^m S_r(t)zdw_r(t) \quad (1.73)$$

с T -периодическими коэффициентами

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S_r(t) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(\xi(t)). \quad (1.74)$$

Здесь проекционная матрица $P(t) = P_{\xi(t)}$.

Отметим, что точка покоя $z = 0$ системы (1.73) не может быть экспоненциально устойчивой в традиционном смысле, поскольку (1.73) имеет, например, T -периодическое решение $z = f(\xi(t))$.

Параметризация цикла \mathcal{M} , задаваемая T -периодическим решением $x = \xi(t)$, позволяет (см. (1.74)) перейти от функций, изначально определенных в точках $x \in \mathcal{M}$, к T -периодическим функциям скалярной переменной $t \in \mathbb{R}^1$. В этих обстоятельствах пространством Σ (см. раздел 1.4) естественно считать множество всех симметрических $n \times n$ -матриц, определенных и достаточно гладких на \mathbb{R}^1 , с условиями периодичности

$$\forall t \in \mathbb{R}^1 \quad V(t+T) = V(t)$$

и вырожденности (см. (1.16))

$$\forall t \in \mathbb{R}^1 \quad V(t)r(t) = 0, \quad r(t) = f(\xi(t)).$$

Соответственно корректируются и другие используемые понятия и конструкции.

Определение 1.9. Матрица $V(t) \in \Sigma$ называется *P -положительной*, если выполняется условие

$$\forall t \in \mathbb{R}^1 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad P(t)z \neq 0 \Rightarrow (z, V(t)z) > 0.$$

В пространстве Σ рассматривается конус

$$\mathcal{K} = \{V \in \Sigma \mid V(t) \text{ — неотрицательно определенная матрица } \forall t \in \mathbb{R}^1\}$$

и множество

$$\mathcal{K}_P = \{V \in \Sigma \mid V \text{ — } P\text{-положительно определенная}\}.$$

Будем предполагать, что детерминированная система

$$dz = F(t)zdt \tag{1.75}$$

является P -устойчивой. Операторы \mathcal{A} , \mathcal{S} , \mathcal{L} и \mathcal{P} , действующие из Σ в Σ , определяются, с учетом замечания 1.2, соотношениями

$$\mathcal{A}[V] = \dot{V} + F^\top(t)V + VF(t), \quad \mathcal{S}[V] = \sum_{r=1}^m S_r^\top(t)VS_r(t),$$

$$\mathcal{L}[V] = \mathcal{A}[V] + \mathcal{S}[V], \quad \mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}.$$

Скалярное произведение элементов $V, W \in \Sigma$ определяется равенством

$$\langle V, W \rangle = \int_0^T \text{tr}(V(t)W(t))dt.$$

Сопряженным оператором \mathcal{A}^* к оператору \mathcal{A} будет

$$\mathcal{A}^*[W] = -\dot{W} + F(t)W + WF^\top(t). \quad (1.76)$$

Для системы (1.73) соответствующей системой с шумами второго типа является

$$dz = F(t)zdt + \sqrt{z^\top Q(t)z}d\eta, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (1.77)$$

где $\eta(t)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами

$$E d\eta = 0, \quad E d\eta(d\eta)^\top = G(t)dt, \quad Q(t), G(t) \in \mathcal{K}.$$

Для системы (1.77) операторы \mathcal{S} и \mathcal{P} имеют вид (см. (1.54), (1.61)):

$$\mathcal{S}[V] = \text{tr}(VG(t)) \cdot Q(t), \quad \mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}[\text{tr}(VG(t))Q(t)].$$

В силу леммы 1.5 имеем $\rho(\mathcal{P}) = \rho(\mathcal{B})$. Здесь оператор \mathcal{B} задается следующим образом:

$$\mathcal{B}[\varphi] = -\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q(t)]G(t))$$

и действует на пространстве Σ^1 скалярных непрерывно-дифференцируемых T -периодических функций. Оператор \mathcal{B} – положительный на конусе \mathcal{K}^1 неотрицательных функций из Σ^1 . Пусть $\varphi(t)$ есть собственная функция ($\varphi \in \mathcal{K}$) оператора \mathcal{B} , соответствующая собственному значению $\rho = \rho(\mathcal{B})$. Тогда

$$\mathcal{B}[\varphi] = -\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q(t)]G(t)) = \rho\varphi. \quad (1.78)$$

Из этого соотношения, при условии нормировки

$$\int_0^T \varphi(t)dt = 1,$$

следует, что

$$\rho = \int_0^T \mathcal{B}[\varphi]dt = - \int_0^T \text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q]G)dt = - \langle \mathcal{A}^{-1}[\varphi Q], G \rangle.$$

Переходя к сопряженному оператору \mathcal{A}^* , получаем новое представление для ρ :

$$\rho = - \langle \varphi Q, (\mathcal{A}^*)^{-1}[G] \rangle = \int_0^T \varphi \text{tr}(QD)dt, \quad (1.79)$$

где $D = -(\mathcal{A}^*)^{-1}[G]$. Матрица $D(t) \in \mathcal{K}$ является (см.(1.76)) единственным в Σ решением уравнения

$$\dot{W} = F(t)W + WF^\top(t) + G(t). \quad (1.80)$$

Из (1.79) следуют простые оценки для $\rho = \rho(\mathcal{P}) = \rho(\mathcal{B})$:

$$\min_{[0,T]} \text{tr}(Q(t)D(t)) \leq \rho \leq \max_{[0,T]} \text{tr}(Q(t)D(t)). \quad (1.81)$$

Отметим, что (1.80) есть уравнение для матрицы вторых моментов $E(z(t)z^\top(t))$ системы с аддитивными шумами

$$dz = F(t)zdt + d\eta(t), \quad (1.82)$$

получаемой из (1.77) формальной заменой мультипликативно-го коэффициента $\sqrt{z^\top Q(t)z}$ на единицу. При этом, независимо от выбора начальных данных, матрица вторых моментов для системы (1.82) сходится к T -периодической матрице $D(t)$ решения уравнения (1.80). Матрица $D(t)$ задает вторые моменты решения, соответствующего некоторому существующему в (1.82) стохастическому периодическому режиму. Существование и единственность такого режима, как и упомянутая выше сходимости, гарантируется P -устойчивостью соответствующей детерминированной системы (1.75). Точные формулировки и доказательства соответствующих утверждений даются в теореме 2.1 второй главы.

Оценки (1.81) спектрального радиуса ρ оператора \mathcal{P} из теоремы 1.4 позволяют получить следующий результат.

Теорема 1.6. Пусть детерминированная система (1.75) является P -устойчивой и матрица $D(t) \in \mathcal{K}$ – решение уравнения (1.80). Тогда неравенство

$$\max_{[0,T]} \text{tr}(Q(t)D(t)) < 1$$

является достаточным, а неравенство

$$\min_{[0,T]} \text{tr}(Q(t)D(t)) < 1$$

является необходимым условием P -устойчивости стохастической системы (1.77).

1.8.1. Случай цикла на плоскости

Рассмотрим систему (1.2) при $n = 2$. В этом случае цикл \mathcal{M} имеет коразмерность $\text{codim}(\mathcal{M}) = 1$. Следуя замечанию 1.4, запишем соответствующую систему первого приближения (1.77), связанную с T -периодическим решением $\xi(t)$, в форме

$$dz = F(t)zdt + \sqrt{z^\top P(t)z}d\eta, \quad (1.83)$$

где $P(t) = p(t)p^\top(t)$, $\eta(t) = \sum_{r=1}^m w_r(t)g_r(t)$, $g_r(t) = S_r(t)p(t)$.
Здесь $p(t)$ – нормированный вектор с условием ортогональности $p(t) \perp f(\xi(t))$, а $G(t) = E d\eta(t)(d\eta(t))^\top = \sum_{r=1}^m g_r(t)g_r^\top(t)$.

Для системы с шумом второго типа (1.83) уравнение (1.78), определяющее величину спектрального радиуса $\rho = \rho(\mathcal{B})$ и соответствующую собственную функцию φ оператора \mathcal{B} , можно записать в виде системы

$$\text{tr}(VG) = \rho\varphi, \quad (1.84)$$

$$\dot{V} + F^\top V + VF = -\varphi P. \quad (1.85)$$

Здесь T -периодическая матрица $V \in \mathcal{K}$ решения уравнения (1.85), имеющая ранг, равный единице, представима в виде

$$V(t) = \mu(t)P(t), \quad (1.86)$$

где $\mu(t)$ – T -периодическая скалярная функция. Из (1.85) и (1.86) следует уравнение для $\mu(t)$:

$$\dot{\mu}P + \mu\dot{P} + \mu(F^\top P + PF) = -\varphi P. \quad (1.87)$$

Умножая (1.87) слева на p^\top и справа на p , с учетом равенств $p^\top P p \equiv 1$, $p^\top \dot{P} p \equiv 0$, получим уравнение

$$\dot{\mu} + \alpha(t)\mu = -\varphi, \quad (1.88)$$

где $\alpha(t) = p^\top(t)(F^\top(t) + F(t))p(t)$. Из (1.84) и (1.86) следует

$$\mu\beta = \rho\varphi, \quad (1.89)$$

где $\beta(t) = p^\top(t)G(t)p(t)$. Исключая φ из (1.88), (1.89), получим

$$\rho(\dot{\mu} + \alpha\mu) + \beta\mu = 0.$$

Разделив полученное равенство на $\mu \neq 0$ и проинтегрировав по отрезку $[0, T]$, получим явную формулу для ρ :

$$\rho = -\frac{\langle \beta \rangle}{\langle \alpha \rangle}.$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ – усреднение по $[0, T]$:

$$\langle \alpha \rangle = \int_0^T \alpha(t) dt.$$

Неравенство

$$\langle \alpha \rangle < 0 \quad (1.90)$$

является необходимым и достаточным условием P -устойчивости детерминированной системы

$$dz = F(t)zdt. \quad (1.91)$$

Благодаря равенству $\langle \alpha \rangle = 2 \langle \text{tr} F \rangle$, условие (1.90) эквивалентно известному неравенству (признак Пуанкаре):

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr} F(t) dt < 0,$$

задающему необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости цикла в детерминированной системе (1.1) при $n = 2$. Здесь λ – характеристический показатель системы (1.91). Отметим, что благодаря вырожденности матриц S_r , справедливо равенство $\beta(t) = \text{tr} \left(\sum_{r=1}^m S_r(t) S_r^\top(t) \right)$.

Таким образом, неравенство $\rho < 1$ (необходимое и достаточное условие P -устойчивости стохастической системы (1.83)) можно записать в следующей форме:

$$\langle \alpha + \beta \rangle = \int_0^T \text{tr} (2F(t) + \sum_{r=1}^m S_r(t) S_r^\top(t)) dt < 0. \quad (1.92)$$

Полученный критерий является естественным обобщением классического критерия Пуанкаре на случай стохастических систем.

Отметим, что все результаты данного раздела, полученные как следствие общей теории стохастической устойчивости для абстрактных инвариантных многообразий, были впервые опубликованы в работе [108], где представляли собой итог разработки метода стохастических функций Ляпунова для орбитальных периодических движений.

1.9. Устойчивость 2-тора

Рассмотрим случай, когда инвариантным многообразием \mathcal{M} систем (1.1), (1.2) является лежащая в \mathbb{R}^n двумерная тороидальная поверхность (\mathcal{M} – 2-тор).

Будем исходить из возможности следующей параметризации точек 2-тора \mathcal{M} . Пусть на \mathcal{M} (см. рис. 1.1) лежит некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая ϑ (экватор), задаваемая функцией $\vartheta(s)$ на интервале $0 \leq s \leq 1$ с условием $\vartheta(0) = \vartheta(1)$. Из каждой точки $\vartheta(s)$ кривой ϑ , как начальной, выходит решение $x(t, s)$ системы (1.1) с условием $x(0, s) = \vartheta(s)$. Предполагается, что траектория $x(t, s)$, обойдя вокруг тора \mathcal{M} , через некоторое время вновь пересечет кривую ϑ .

Пусть $T(s) = \min\{ t > 0 \mid x(t, s) \in \vartheta \}$ – момент первого возвращения траектории $x(t, s)$ на кривую ϑ , при этом $x(T(s), s)$ есть точка возвращения. Пусть $\tau(s)$ – точка интервала $[0, 1)$, при которой $\vartheta(\tau(s)) = x(T(s), s)$. Здесь $\tau(s)$ есть функция последования сечений Пуанкаре кривой ϑ фазовыми траекториями системы (1.1). Предполагается, что фазовые траектории семейства решений $x(t, s)$ системы (1.1) полностью покрывают тор \mathcal{M} . При этом тороидальная поверхность может состоять как из замкнутых фазовых траекторий (циклов) и траекторий, к ним сходящихся, так и из семейства незамкну-

тых траекторий, лежащих всюду плотно на \mathcal{M} (квазипериодический случай).

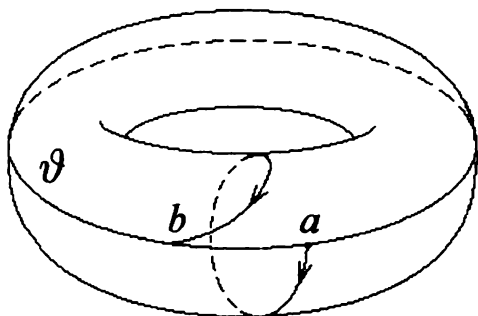


Рис. 1.1. Тороидальная поверхность:

ϑ – замкнутая кривая (экватор); $a = x(0, s) = \vartheta(s)$ – начальная точка решения $x(t, s)$; $b = x(T(s), s) = \vartheta(\tau(s))$ – точка первого возвращения решения $x(t, s)$ на кривую ϑ

Функция $x(t, s)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками 2-тора \mathcal{M} и точками множества

$$D = \{(t, s) \mid 0 \leq t < T(s), 0 \leq s < 1\} :$$

$$\mathcal{M} = \{x(t, s) \mid (t, s) \in D\}.$$

Вектор-функции

$$y(t, s) = \frac{\partial x(t, s)}{\partial t}, \quad u(t, s) = \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} \quad (1.93)$$

линейно независимы и задают плоскость $T_{x(t, s)}$, касательную к поверхности \mathcal{M} в точке $x(t, s)$. При этом для каждой точки γ на торе \mathcal{M} можно указать $t = t(\gamma)$, $s = s(\gamma)$ такие, что $x(t, s) = \gamma$.

Естественная область изменения переменной s – окружность. При рассмотрении функции $\tau(s)$ на полуинтервале $[0, 1)$

неизбежно возникают разрывы. Для того чтобы обеспечить непрерывность $\tau(s)$, будем считать областью изменения s всю числовую ось. При этом исходную функцию $x(t, s)$ по переменной s следует считать периодической. Равенства

$$x(t, s + 1) = x(t, s), \quad x(T(s) + t, s) = x(t, \tau(s)) \quad (1.94)$$

позволяют распространить функцию $x(t, s)$ на всю плоскость:

$$\Pi = \{(t, s) | -\infty < t < +\infty, -\infty < s < +\infty\}.$$

Такая параметризация 2-тора \mathcal{M} позволяет перейти от функций, изначально определенных в точках $x \in \mathcal{M}$, к функциям, зависящим от двух скалярных переменных $(t, s) \in \Pi$.

В рассматриваемом здесь случае вопрос об ЭСК-устойчивости тора \mathcal{M} системы (1.2) по теореме 1.3 сводится к исследованию динамики проекций $P(t, s)z(t, s)$ решений $z(t, s)$ (P -устойчивость) линейной системы первого приближения

$$dz = F(t, s)zdt + \sum_{r=1}^m S_r(t, s)zdw_r(t) \quad (1.95)$$

с коэффициентами

$$F(t, s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, s)), \quad S_r(t, s) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(x(t, s)). \quad (1.96)$$

Здесь проекционная матрица $P(t, s) = P_{x(t, s)} = P_{y(t, s), u(t, s)}$, где $y(t, s)$, $u(t, s)$ из (1.93), а матрица $P_{y, u}$, задающая оператор проектирования на подпространство, ортогональное плоскости, натянутой на векторы y, u , может быть найдена из соотношений

$$P_{y, u} = P_y - \frac{P_y u u^\top P_y}{u^\top P_y u}, \quad P_y = I - \frac{y y^\top}{y^\top y}, \quad \text{rank}(P_{y, u}) = n - 2.$$

Отметим, что точка покоя $z = 0$ системы (1.95) не может быть экспоненциально устойчивой в традиционном смысле, поскольку (1.95) имеет решения $y(t, s), u(t, s)$, являющиеся по t либо периодическими, либо квазипериодическими функциями.

В этих обстоятельствах пространством Σ (см. раздел 1.4) естественно считать множество всех симметрических $n \times n$ -матриц, определенных и достаточно гладких на Π с условиями согласования (см. (1.94)):

$$\forall (t, s) \in \Pi \quad V(t, s+1) = V(t, s), \quad V(T(s) + t, s) = V(t, \tau(s))$$

и вырожденности

$$\forall (t, s) \in \Pi \quad \forall z \in T_{x(t,s)} \quad V(t, s)z = 0.$$

Соответственно корректируются и другие используемые понятия и конструкции.

Определение 1.10. Матричная функция $V(t, s) \in \Sigma$ называется *P-положительной*, если выполняется условие

$$\forall (t, s) \in \Pi \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad P(t, s)z \neq 0 \Rightarrow (z, V(t, s)z) > 0.$$

В пространстве Σ рассматриваются конус

$$\mathcal{K} = \{V \in \Sigma \mid V(t, s) \text{ — неотрицательно определенная матрица } \forall (t, s) \in \Pi\}$$

и множество

$$\mathcal{K}_P = \{V \in \Sigma \mid V \text{ — } P\text{-положительно определенная}\}.$$

Операторы \mathcal{A} , \mathcal{S} , \mathcal{L} и \mathcal{P} , действующие из Σ в Σ , определяются, с учетом замечания 1.2, соотношениями

$$\mathcal{A}[V] = \frac{\partial V}{\partial t} + F^\top(t, s)V + VF(t, s),$$

$$\mathcal{S}[V] = \sum_{r=1}^m S_r^\top(t, s) V S_r(t, s),$$

$$\mathcal{L}[V] = \mathcal{A}[V] + \mathcal{S}[V], \quad \mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}.$$

Для системы (1.95) соответствующей системой с шумами второго типа будет

$$dz = F(t, s)zdt + \sqrt{z^\top Q(t, s)z}d\eta, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (1.97)$$

где $\eta(t)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами

$$Ed\eta = 0, \quad Ed\eta(d\eta)^\top = G(t, s)dt, \quad Q(t, s), G(t, s) \in \mathcal{K}.$$

Для системы (1.97) операторы \mathcal{S} и \mathcal{P} имеют вид

$$\mathcal{S}[V] = \text{tr}(VG(t, s)) \cdot Q(t, s), \quad \mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}[\text{tr}(VG(t, s))Q(t, s)].$$

В силу леммы 1.3 имеем $\rho(\mathcal{P}) = \rho(\mathcal{B})$. Здесь оператор \mathcal{B} задается следующим образом:

$$\mathcal{B}[\varphi] = -\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q(t, s)]G(t, s))$$

и действует на пространстве Σ^1 скалярных непрерывно-дифференцируемых функций. Оператор \mathcal{B} – положительный на конусе \mathcal{K}^1 неотрицательных функций из Σ^1 . Будем рассматривать квазипериодический случай. Определим в пространстве Σ скалярное произведение

$$\langle V, W \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr}(VW)dt.$$

Для оператора \mathcal{A} сопряженным будет оператор \mathcal{A}^* :

$$\mathcal{A}^*[V] = -\frac{\partial V}{\partial t} + F(t, s)V + VF^\top(t, s), \quad (1.98)$$

при этом оператор \mathcal{B}^* – сопряженный для \mathcal{B} – имеет представление

$$\mathcal{B}^*[\psi] = -\text{tr}(Q(t, s)(\mathcal{A}^*)^{-1}[\psi G(t, s)]).$$

Рассмотрим произвольную функцию δ из \mathcal{K}_P^1 и собственную функцию φ оператора \mathcal{B} , соответствующую собственному значению $\rho = \rho(\mathcal{B})$ и удовлетворяющую условию нормировки

$$\langle \varphi, \delta \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, s) \delta(t, s) dt = 1. \quad (1.99)$$

Из равенства $\rho \cdot \varphi = \mathcal{B}[\varphi]$ и (1.99) следует, что

$$\rho = \langle \mathcal{B}[\varphi], \delta \rangle = \langle \varphi, \mathcal{B}^*[\delta] \rangle = \langle \varphi, \delta \psi \rangle, \quad (1.100)$$

где $\psi = \mathcal{B}^*[\delta]/\delta$. Для $\delta = \bar{\delta}$ – собственной функции оператора \mathcal{B}^* , соответствующей собственному значению $\rho = \rho(\mathcal{B}^*) = \rho(\mathcal{B})$, – функция ψ становится константой $\psi(t, s, \bar{\delta}) \equiv \rho$.

В результате, с учетом соотношений (1.99, 1.100), справедлива

Лемма 1.6. Спектральный радиус ρ оператора \mathcal{B} при любой функции $\delta \in \mathcal{K}_P^1$ удовлетворяет неравенствам

$$\min_{\Pi} \psi(t, s, \delta) \leq \rho \leq \max_{\Pi} \psi(t, s, \delta) \quad (1.101)$$

и

$$\rho = \min_{\delta \in \mathcal{K}_P^1} \max_{\Pi} \psi(t, s, \delta) = \max_{\delta \in \mathcal{K}_P^1} \min_{\Pi} \psi(t, s, \delta). \quad (1.102)$$

Замечание 1.7. Построение функции ψ , в силу равенства

$$\psi = \psi(t, s, \delta) = \text{tr}(Q(\mathcal{A}^{*-1})[\delta G]) = \text{tr}(QD)/\delta,$$

связано с отысканием матрицы $D = -\mathcal{A}^{*-1}[\delta G]$ – единственного в \mathcal{K} решения уравнения

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + FD + DF^\top = -\delta G. \quad (1.103)$$

Уравнение (1.103) имеет простой вероятностный смысл. Его решение есть матрица вторых моментов $D = E\bar{z}(t, s)\bar{z}^T(t, s)$ решения \bar{z} стохастической системы

$$dz = F(t, s)zdt + \sqrt{\delta(t, s)}d\eta, \quad (1.104)$$

получаемой из (1.97) заменой мультипликативного шума на соответствующий аддитивный. При этом $\bar{z}(t, s)$ – установившийся в системе (1.104) случайный процесс, к которому, благодаря P -устойчивости системы

$$dz = F(t, s)zdt, \quad (1.105)$$

сходятся в среднем квадратичном (см. теорему 2.1) все другие решения системы (1.104) независимо от выбора начального состояния $z(0, s) = z_0(s)$ в условиях $P(0, s)z_0(s) = z_0(s)$. Таким образом, и матрицу D решения уравнения (1.103) можно находить соответствующим методом установления.

Замечание 1.8. Представленная здесь для системы (1.97) возможность перейти от оператора \mathcal{P} , действующего в пространстве матричных функций размерности $n \times n$, к существенно более простому оператору \mathcal{B} , заданному на пространстве скалярных функций, позволяет анализ устойчивости на основе спектрального критерия (теорема 1.4) сделать достаточно конструктивным. Соотношения (1.101), (1.102) могут служить основой для разработки разнообразных вариационных методов оценивания спектрального радиуса оператора \mathcal{B} . Повышение точности численных методов при построении таких оценок позволит в конечном счете (см. замечание 1.2) получить достаточно точные условия устойчивости, близкие к необходимым.

1.9.1. Случай 2-тора в трехмерном пространстве

Рассмотрим систему (1.2) при $n = 3$. В этом случае тороидальное многообразие \mathcal{M} имеет коразмерность $\text{codim}(\mathcal{M}) = 1$.

Следуя замечанию 1.4, запишем соответствующую систему первого приближения (1.97), связанную с решением $x(t, s)$, в форме

$$dz = F(t, s)zdt + \sqrt{z^\top P(t, s)z}d\eta, \quad (1.106)$$

где

$$P(t, s) = p(t, s)p^\top(t, s), \quad \eta(t) = \sum_{r=1}^m w_r(t)g_r(t, s),$$

$$G(t) = E d\eta(t)(d\eta(t))^\top = \sum_{r=1}^m g_r(t, s)g_r^\top(t, s) = \sum_{r=1}^m S_r(t, s)S_r^\top(t, s),$$

$$g_r(t, s) = S_r(t, s)p(t, s),$$

$p(t, s)$ – нормированный вектор, ортогональный векторам $y(t, s)$ и $u(t, s)$ из (1.93).

Для оператора \mathcal{B} стохастической системы (1.106) собственное значение $\rho = \rho(\mathcal{B})$, необходимое для исследования P -устойчивости, и соответствующая собственная функция $\varphi \in \mathcal{X}_P^1$ в данном случае связаны соотношением

$$\rho\varphi = -\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi P]G). \quad (1.107)$$

Матрица $V = -\mathcal{A}^{-1}[\varphi P]$, при $n = 3$, имеет ранг, равный единице, и может быть представлена в виде $V = \mu P$, где μ – скалярная функция ($\mu \in \mathcal{X}_P^1$).

Из соотношений $\mu P = -\mathcal{A}^{-1}[\varphi P]$, $p^\top p \equiv 1$, $p^\top \frac{\partial P}{\partial t} p \equiv 0$ следуют равенства

$$\varphi = -p^\top \mathcal{A}[\mu P]p = -\left[\frac{\partial \mu}{\partial t} + p^\top [F^\top + F]p \cdot \mu \right],$$

из которых и (1.107) вытекает, что

$$\rho \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} + \alpha \cdot \mu \right] + \beta \mu = 0, \quad (1.108)$$

где $\alpha(t, s) = p^\top(t, s)[F^\top(t, s) + F(t, s)]p(t, s)$, $\beta(t, s) = \text{tr}G(t, s)$.

Разделив (1.108) на μ и воспользовавшись равенством

$$\langle \frac{\partial \mu}{\partial t} / \mu \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \mu}{\partial t} / \mu dt = 0,$$

получим для ρ явное выражение: $\rho = -\frac{\langle \beta \rangle}{\langle \alpha \rangle}$. Величина ρ после усреднения по t функций α и β остается функцией от s : $\rho = \rho_s$. В результате

$$\rho(\mathcal{B}) = \max_s \left\{ -\frac{\langle \beta \rangle}{\langle \alpha \rangle} \right\}.$$

Неравенство

$$\max_s \langle \alpha \rangle < 0$$

является необходимым и достаточным условием [109] экспоненциальной устойчивости 2-тора \mathcal{M} для детерминированной системы (1.1). При этом неравенство $\rho(\mathcal{B}) < 1$, записанное в виде

$$\begin{aligned} & \max_s \langle \alpha + \beta \rangle = \\ & = \max_s \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr}[2F(t, s) + \sum_{r=1}^m S_r(t, s) S_r^\top(t, s)] dt < 0, \end{aligned} \quad (1.109)$$

является необходимым и достаточным условием P -устойчивости системы (1.106), а значит, и ЭСК-устойчивости 2-тора \mathcal{M} для стохастической системы (1.2) при $n = 3$.

Замечание 1.9. Функция $\gamma(s) = \langle \alpha + \beta \rangle$ в квазипериодическом случае есть константа

$$\gamma(s) \equiv \gamma_0 = \frac{1}{S} \int_{\mathcal{M}} \left[2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_{ri}}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx.$$

Если $x(t, s)$ есть цикл с периодом $T(s) : x(t + T(s), s) = x(t, s)$, то

$$\gamma(s) = \frac{1}{T(s)} \int_0^{T(s)} (\alpha(t, s) + \beta(t, s)) dt.$$

Для тора, целиком состоящего из циклов, функция $\gamma(s)$ может принимать различные значения (для каждого цикла – свое). Если $x(t, s)$ – решение, сходящееся при $t \rightarrow \infty$ к предельному циклу $x(t, s^*)$, то $\gamma(s) = \gamma(s^*)$. Для тора, состоящего из конечного числа чередующихся устойчивых и неустойчивых циклов, функция $\gamma(x)$ – кусочно-постоянна. При этом для s , соответствующего неустойчивому циклу, γ имеет изолированное значение, а на интервале значений s , отвечающих всем траекториям, сходящимся к одному циклу, является константой.

П р и м е р

Рассмотрим в трехмерном пространстве переменных (x, y, z) 2-тор M , задаваемый уравнением

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = r_0^2, \quad 0 < r_0 < 2.$$

В новых переменных r, φ, ψ , связанных со старыми переменными x, y, z соотношениями

$$x = (2 + r \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (2 + r \cos \psi) \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi,$$

тороидальная поверхность задается совсем просто:

$$r = r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Рассмотрим в новых переменных стохастическую систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r, \varphi, \psi) + \sigma(r, \varphi, \psi) \dot{w} \\ \dot{\varphi} &= \alpha \\ \dot{\psi} &= \beta, \end{aligned} \tag{1.110}$$

где f и σ — 2π -периодические функции по переменным φ и ψ . Предполагается, что $f(r_0, \varphi, \psi) = 0$ и $\sigma(r_0, \varphi, \psi) = 0$ при всех φ и ψ . Данные условия означают, что тор \mathcal{M} является инвариантным многообразием для (1.110) и может быть параметризован семейством решений

$$r(t) \equiv r_0, \quad \varphi(t, s) = \alpha t + s, \quad \psi(t) = \beta t,$$

где роль одного из параметров играет время t , а другим является начальное состояние $\varphi(0, s) = s$.

Необходимым и достаточным условием ЭСК-устойчивости тора \mathcal{M} (см. (1.109)) будет неравенство

$$\max_s \gamma(s) < 0,$$

где

$$\gamma(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(2 \frac{\partial f}{\partial r}(r_0, s + \alpha t, \beta t) + \frac{\partial \sigma^2}{\partial r}(r_0, s + \alpha t, \beta t) \right) dt.$$

Пусть

$$f(r, \varphi, \psi) = \frac{1}{4} \mu(\varphi, \psi) r \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\sigma(r, \varphi, \psi) = \sqrt{\theta(\varphi, \psi)}(r - r_0).$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r_0, \varphi, \psi) = \frac{1}{2} \mu(\varphi, \psi)$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial r}(r_0, \varphi, \psi) = \theta(\varphi, \psi)$$

и

$$\gamma(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\mu(s + \alpha t, \beta t) + \theta(s + \alpha t, \beta t)] dt.$$

Исследуем устойчивость тора для функций вида

$$\mu(\varphi, \psi) = \mu_0 + \mu_1 \sin(k\varphi) \sin(l\psi)$$

$$\theta(\varphi, \psi) = \theta_0 + \theta_1 \sin(m\varphi) \sin(n\psi),$$

где k, l, m, n – натуральные числа, $|\theta_1| \leq \theta_0$.

Здесь возможны случаи:

$$\text{а) } k\alpha \neq l\beta, m\alpha \neq n\beta \quad \gamma(s) = \mu_0 + \theta_0;$$

$$\text{б) } k\alpha = l\beta, m\alpha \neq n\beta \quad \gamma(s) = \mu_0 - \frac{\mu_1}{2} \sin(ks) + \theta_0;$$

$$\text{в) } k\alpha \neq l\beta, m\alpha = n\beta \quad \gamma(s) = \mu_0 + \theta_0 - \frac{\theta_1}{2} \sin(ms);$$

$$\text{г) } k\alpha = l\beta, m\alpha = n\beta \quad \gamma(s) = \mu_0 - \frac{\mu_1}{2} \sin(ks) + \theta_0 - \frac{\theta_1}{2} \sin(ms).$$

При этом условия устойчивости имеют вид:

$$\text{а) } \mu_0 + \theta_0 < 0;$$

$$\text{б) } \mu_0 + \frac{|\mu_1|}{2} + \theta_0 < 0;$$

$$\text{в) } \mu_0 + \theta_0 + \frac{|\theta_1|}{2} < 0;$$

$$\text{г) } \mu_0 + \theta_0 + \frac{|\mu_1| + |\theta_1|}{2} < 0.$$

Как видим, рассматриваемая система наиболее устойчива при иррациональном значении числа вращения $\nu = \frac{\alpha}{\beta}$. В этом слу-

чае $\left(\alpha \neq \frac{l}{k} \neq \frac{n}{m}\right)$ параметры μ_1, k, l и θ_1, m, n не влияют (см. а)) на устойчивость.

При рациональном значении ν возможны резонансные случаи: б) $\nu = \frac{l}{k}$; в) $\nu = \frac{n}{m}$; г) $\nu = \frac{l}{k} = \frac{n}{m}$, для которых изменять μ_1 и θ_1 можно лишь в определенных пределах. В случаях резонанса свойство устойчивости перестает быть грубым. Сколь угодно малое изменение α и β разрушает резонанс, функция $\gamma(s)$ убывает скачком. При этом запас устойчивости системы резко возрастает.

Отметим, что все результаты данного раздела, полученные как следствие общей теории стохастической устойчивости для абстрактных инвариантных многообразий, были впервые опубликованы в работах [109, 250], представляющих итоги разработки метода функций Ляпунова для двумерных тороидальных многообразий в детерминированном и стохастическом случаях.

1.10. Устойчивость линейных стохастических систем с периодическими коэффициентами

Линейные дифференциальные уравнения с периодически коэффициентами являются классическим объектом детерминированной теории устойчивости [124]. В настоящее время анализ таких уравнений опирается на глубоко разработанную теорию и имеет многочисленные приложения. Общие методы исследования устойчивости систем с периодическими коэффициентами в стохастическом случае представлены в [119, 120].

Рассмотрим линейную стохастическую систему

$$dx = A(t)x dt + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t)x dw_r, \quad (1.111)$$

где x — n -мерный вектор, w_r ($r = 1, \dots, m$) — некоррелирован-

ные стандартные винеровские процессы, $A(t), \sigma_r(t)$ – T -периодические $n \times n$ -матричные функции.

Пусть $x(t) = x(t, s, x)$ является решением системы (1.111) с начальным условием $x(s) = x$.

Определение 1.11. Решение $x \equiv 0$ системы (1.111) называется *экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном* (коротко – *устойчивым*), если существуют $\alpha > 0$, $L > 0$ такие, что выполняется неравенство

$$E \| x(t, s, x) \|^2 \leq L \exp(-\alpha(t-s)) E \| x \|^2$$

для всех x и всех $t \geq s$.

Рассмотрим пространство Σ^n симметрических T -периодических $n \times n$ -матричных функций $V(t)$, определенных и достаточно гладких на \mathbb{R}^1 . В Σ^n рассмотрим конус

$$\mathcal{K}^n = \{ V \in \Sigma^n \mid V(t) - \text{неотрицательно определена } \forall t \in \mathbb{R}^1 \}$$

и его внутренность

$$\mathcal{K}_1^n = \{ V \in \Sigma^n \mid V(t) - \text{положительно определенная } \forall t \in \mathbb{R}^1 \}.$$

Справедлив следующий критерий [119, 120].

Предложение 1.4. Пусть система (1.111) является устойчивой.

Тогда

а) для любой матрицы $C \in \mathcal{K}^n$ существует единственная матрица $V \in \mathcal{K}^n$, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{V} + A^\top(s)V + VA(s) + \sum_{r=1}^m \sigma_r^\top(s)V\sigma_r(s) = -C(s); \quad (1.112)$$

б) если $C \in \mathcal{K}_1^n$, то $V \in \mathcal{K}_1^n$.

Если для некоторой матрицы $C \in \mathcal{K}_1^n$ уравнение (1.112) имеет решение $V \in \mathcal{K}_1^n$, то система (1.111) является устойчивой.

Замечание 1.10. Для решения $V(s)$ уравнения (1.112), используя формулу Ито, можно записать следующее представление:

$$\text{tr}(V(s)X) = E \int_s^\infty x^\top(t)C(t)x(t)dt = \int_s^\infty \text{tr}(M(t)C(t))dt. \quad (1.113)$$

Здесь X – произвольная симметрическая неотрицательно определенная матрица, $x(t) = x(t, s, x)$ – решение уравнения (1.111) с условием $x(s) = x$, где $Exx^\top = X$, $M(t) = Ex(t)x^\top(t)$ – матрица вторых моментов, удовлетворяющая следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= A(t)M + MA^\top(t) + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t)M\sigma_r^\top(t), \\ M(s) &= X. \end{aligned}$$

Спектральный критерий устойчивости

Рассмотрим операторы $\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{L}$:

$$\mathcal{A}[V] = \dot{V}(s) + A^\top(s)V(s) + V(s)A(s),$$

$$\mathcal{S}[V] = \sum_{r=1}^m \sigma_r^\top(s)V(s)\sigma_r(s),$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{S},$$

определенные на любой функции V из Σ^n .

Уравнение (1.112) запишем в виде

$$\mathcal{L}[V] = \mathcal{A}[V] + \mathcal{S}[V] = -C. \quad (1.114)$$

Здесь \mathcal{A} есть оператор Ляпунова для соответствующей детерминированной системы

$$dx = A(t)xdt, \quad (1.115)$$

\mathcal{L} – оператор Ляпунова для стохастической системы (1.111). Оператор стохастических возмущений \mathcal{S} является положительным.

С операторной точки зрения устойчивость системы (1.111) (см. предложение 1.4) эквивалентна существованию обратного оператора \mathcal{L}^{-1} . Оператор \mathcal{L}^{-1} является отрицательным: $-\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{K}^n] \subset \mathcal{K}^n$.

Пусть система (1.115) является устойчивой. Рассмотрим отрицательный оператор \mathcal{A}^{-1} . Теперь уравнение (1.114) можно записать в виде

$$V - \mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}[C], \quad (1.116)$$

где оператор \mathcal{P} задан следующим образом:

$$\mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}. \quad (1.117)$$

Оператор \mathcal{P} , как произведение двух положительных операторов $-\mathcal{A}^{-1}$ и \mathcal{S} , является положительным. Таким образом, анализ устойчивости стохастической системы (1.111) можно связать с исследованием спектральных свойств оператора \mathcal{P} .

Теорема 1.7. Для того чтобы система (1.111) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы

- а) система (1.115) была устойчива;
- б) выполнялось неравенство

$$\rho(\mathcal{P}) < 1, \quad (1.118)$$

где $\rho(\mathcal{P})$ есть спектральный радиус оператора \mathcal{P} .

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1.111) устойчива. Тогда система (1.115) также устойчива и существует оператор \mathcal{A}^{-1} . Из предложения 1.4 и соотношений (1.116), (1.117) следует, что для некоторой матрицы $V \in \mathcal{K}_1^n$ выполняется условие

$$V - \mathcal{P}[V] \in \mathcal{K}_1^n. \quad (1.119)$$

По теореме 16.7 из [51], благодаря нормальности и телесности конуса \mathcal{K}^n , из (1.119) следует неравенство (1.118).

Достаточность. Пусть система (1.115) устойчива. Тогда существуют операторы \mathcal{A}^{-1} и $\mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$. Рассмотрим оператор \mathcal{D} :

$$\mathcal{D}[V] = V - \mathcal{P}[V].$$

В силу (1.118) оператор \mathcal{D} имеет обратный \mathcal{D}^{-1} :

$$\mathcal{D}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}^k.$$

Оператор \mathcal{D}^{-1} – положительный. Это означает, что для всякой матрицы $C \in \mathcal{K}_1^n$ найдется $V = \mathcal{D}^{-1}[-\mathcal{A}^{-1}[C]] \in \mathcal{K}_1^n$. Матрица $V \in \mathcal{K}_1^n$ является решением уравнения (1.114). Следовательно, система (1.111) устойчива.

Замечание 1.11. Спектральный радиус $\rho(\mathcal{P}) \neq 0$ определяет бифуркационное значение $\varepsilon^* = \sqrt{\frac{1}{\rho(\mathcal{P})}}$ параметра интенсивности шума $\varepsilon \geq 0$ для системы

$$dx = A(t)x dt + \varepsilon \sum_{r=1}^m \sigma_r(t)x dw_r. \quad (1.120)$$

Система (1.120) является устойчивой при всех $\varepsilon < \varepsilon^*$ и неустойчивой при всех $\varepsilon \geq \varepsilon^*$. Если $\rho(\mathcal{P}) = 0$, то система (1.120) устойчива при всех $\varepsilon \geq 0$. Здесь величина $\rho(\mathcal{P})$ характеризует «запас устойчивости» детерминированной системы (1.115) к воздействию стохастических возмущений.

Замечание 1.12. Рассмотрим наряду с системой (1.111) систему

$$dx = A(t)x dt + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t)x dw_r + \varepsilon \sigma(t)x dw \quad (1.121)$$

с дополнительным мультипликативным шумом интенсивности $\varepsilon > 0$, $w(t)$ – некоррелированный с $w_r(t)$ ($r = 1, \dots, m$) стандартный винеровский процесс, $\sigma(t)$ – T -периодическая $n \times n$ -матричная функция.

Пусть система (1.111) является устойчивой. Тогда существуют операторы \mathcal{L}^{-1} и $\mathcal{P}_1 = -\mathcal{L}^{-1}\mathcal{S}_1$, где \mathcal{L} есть оператор Ляпунова системы (1.111), а \mathcal{S}_1 :

$$\mathcal{S}_1[V] = \sigma^\top(s)V(s)\sigma(s),$$

является положительным оператором, связанным с дополнительным мультипликативным шумом. Здесь бифуркационное значение параметра интенсивности ε дополнительного шума равно: $\varepsilon^* = \sqrt{\frac{1}{\rho(\mathcal{P}_1)}}$. Значение $\rho(\mathcal{P}_1)$ характеризует запас устойчивости стохастической системы (1.111) по отношению к воздействию дополнительного одиночного шума.

Вычисление значений оператора \mathcal{L}^{-1} связано с решением периодического уравнения Ляпунова (1.112).

Алгоритмы решения периодического уравнения Ляпунова

Для численного решения матричного уравнения Ляпунова (1.112) можно предложить следующие алгоритмы.

Алгоритм 1. Рассмотрим на $[0, T]$ последовательность матриц $V_k(s)$, $k = 1, 2, \dots$, где $V_k(s)$ – решение задачи Коши:

$$\dot{V}_k + A^\top(s)V_k + V_k A(s) + \sum_{r=1}^m \sigma_r^\top(s)V_k \sigma_r(s) = -C(s),$$

$$V_k(T) = V_{k-1}(0), \quad V_0(s) \equiv 0.$$

Пусть система (1.111) является устойчивой. Тогда для T -периодического решения $V(s) \in \mathcal{K}_1^n$ уравнения (1.112) справедливо

$$V(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k(s).$$

Алгоритм 2. Рассмотрим последовательность матриц $V_k(s)$, $k = 1, 2, \dots$, где $V_k(s) \in \mathcal{K}_1^n$ – решение уравнения

$$\dot{V}_k + A^\top(s)V_k + V_k A(s) = -C(s) - \sum_{r=1}^m \sigma_r^\top(s)V_{k-1}\sigma_r(s) \quad (1.122)$$

с условием

$$V_0 = 0.$$

Пусть система (1.111) является устойчивой. Тогда для T -периодического решения $V(s) \in \mathcal{K}_1^n$ уравнения (1.112) справедливо

$$V(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k(s). \quad (1.123)$$

Доказательство сходимости алгоритма 2. Решение $V(s) \in \mathcal{K}_1^n$ уравнения (1.112) имеет вид (см. доказательство теоремы 1.7, достаточность):

$$V = \mathcal{D}^{-1}[-\mathcal{A}^{-1}[C]] = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}^l[-\mathcal{A}^{-1}[C]].$$

Решение $V_k(s) \in \mathcal{K}_1^n$ уравнения (1.122) можно записать в виде

$$V_k = -\mathcal{A}^{-1}[C] + \mathcal{P}[V_{k-1}] = V_1 + \mathcal{P}[V_{k-1}] = \sum_{l=0}^{k-1} \mathcal{P}^l[-\mathcal{A}^{-1}[C]].$$

Если система (1.111) устойчива, то $\rho(\mathcal{P}) < 1$ и выполняется (1.123).

Оценки спектрального радиуса оператора \mathcal{P}

Рассмотрим стохастическую систему с одним шумом второго типа

$$dx = A(t)x dt + \sqrt{x^\top Q(t)x} d\eta, \quad (1.124)$$

где $\eta(t)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами

$$Ed\eta(t) = 0, \quad Ed\eta(t)d\eta^\top(t) = G(t)dt, \quad Q \in \mathcal{K}^n, \quad G \in \mathcal{K}^n.$$

Пусть детерминированная система (1.115) является устойчивой. Тогда существует оператор \mathcal{A}^{-1} . Для системы (1.124) оператор \mathcal{S} имеет вид

$$\mathcal{S}[V] = \text{tr}(VG)Q.$$

Значением оператора $W = \mathcal{P}[V] = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}[V]$ является матрица $W \in \mathcal{K}^n$, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{W} + A^\top(s)W + WA(s) = -\mu(s)Q(s), \quad (1.125)$$

где

$$\mu(s) = \text{tr}(V(s)G(s)) \geq 0 \quad (1.126)$$

является T -периодической функцией.

Пусть $V \in \mathcal{K}_1^n$ и $\rho = \rho(\mathcal{P})$ являются собственным вектором и собственным значением оператора \mathcal{P} . Равенство $\mathcal{P}[V] = \rho V$ можно переписать (см. (1.125), (1.126)) в виде

$$-\mathcal{A}^{-1}[\mu Q] = \rho V. \quad (1.127)$$

Из (1.127) следует, что

$$-\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\mu Q]G) = \rho\mu. \quad (1.128)$$

Соотношение (1.128) означает, что функция

$$\mu(s) = \text{tr}(V(s)G(s))$$

является собственной (с тем же самым собственным значением ρ) для оператора \mathcal{B} вида

$$\mathcal{B}[\varphi] = -\text{tr}(\mathcal{A}^{-1}[\varphi Q]G). \quad (1.129)$$

Этот оператор определен на пространстве Σ^1 скалярных T -периодических функций. Оператор \mathcal{B} является положительным. Здесь конус \mathcal{K}^1 и его внутренность \mathcal{K}_1^1 задаются совсем просто:

$$\mathcal{K}^1 = \{\varphi \in \Sigma^1 \mid \varphi(t) \geq 0 \text{ при любых } t \in [0, T]\},$$

$$\mathcal{K}_1^1 = \{\varphi \in \Sigma^1 \mid \varphi(t) > 0 \text{ при любых } t \in [0, T]\}.$$

Справедливо и обратное. Каждое собственное значение оператора \mathcal{B} является собственным значением оператора \mathcal{P} . Таким образом, спектральные радиусы этих операторов совпадают:

$$\rho(\mathcal{P}) = \rho(\mathcal{B})$$

и в анализе устойчивости системы (1.124) вместо условия (1.118) можно проверять неравенство

$$\rho(\mathcal{B}) < 1$$

с более простым оператором \mathcal{B} .

Рассмотрим функцию

$$J[\varphi, s] = \frac{\mathcal{B}[\varphi](s)}{\varphi(s)},$$

где $\varphi \in \mathcal{K}_1^1$.

Теорема 1.8. Пусть ρ является спектральным радиусом оператора \mathcal{B} . Тогда при любом $\varphi \in \mathcal{K}_1^1$ справедливы неравенства

$$\min_{[0, T]} J[\varphi, s] \leq \rho \leq \max_{[0, T]} J[\varphi, s] \quad (1.130)$$

и

$$\rho = \min_{\varphi \in \mathcal{K}_1^1} \max_{[0, T]} J[\varphi, s] = \max_{\varphi \in \mathcal{K}_1^1} \min_{[0, T]} J[\varphi, s]. \quad (1.131)$$

Доказательство следует из теорем 16.1, 16.2 и 16.3 [51].

Данная теорема может служить основой для разработки разнообразных численных методов оценки спектрального радиуса ρ . Важно подчеркнуть следующее: во многих случаях необязательно искать ρ с очень высокой точностью. Действительно, если нас интересует устойчивость системы (1.124), то

достаточно найти мажоранту $\rho^* : \rho \leq \rho^* < 1$. С другой стороны, для доказательства неустойчивости системы (1.124) достаточно найти миноранту $\rho_* : 1 < \rho_* \leq \rho$.

Утверждение 1.5. Функция $J[\varphi, s]$ имеет представление

$$J[\varphi, s] = E \int_s^\infty z^\top(t) Q(t) z(t) dt. \quad (1.132)$$

Здесь $z(t)$ при $t \geq s$ является решением детерминированной системы

$$\dot{z} = \left(A(t) + \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\varphi(t)} I \right) z \quad (1.133)$$

со случайными начальными данными $z(s)$, удовлетворяющими равенству

$$E z(s) z^\top(s) = G(s). \quad (1.134)$$

Доказательство. Из (1.113) следует

$$J[\varphi, s] = E \int_s^\infty x^\top(t) (\varphi(t) Q(t)) x(t) dt,$$

где $x(t)$ является решением уравнения $\dot{x} = A(t)x$ на интервале $[s, \infty)$ с условием $E x(s) x^\top(s) = \frac{1}{\varphi(s)} G(s)$.

Замена $z(t) = \sqrt{\varphi(t)} x(t)$ приводит к (1.132) – (1.134).

Можно доказать, что множество решений задачи (1.133) – (1.134) для всех $\varphi \in \mathcal{K}_1^1$ совпадает с множеством решений задачи

$$\dot{z} = (A(t) + \vartheta(t)I)z, \quad E z(s) z^\top(s) = G(s) \quad (1.135)$$

для всех $\vartheta(t) \in \Theta$, где

$$\Theta = \left\{ \vartheta(t) \in \Sigma^1 \mid \vartheta(t) \text{ удовлетворяет условию } \int_0^T \vartheta(t) dt = 0 \right\}.$$

Соотношения (1.130) – (1.131) могут быть переписаны в виде

$$\min_{[0,T]} I[\vartheta, s] \leq \rho \leq \max_{[0,T]} I[\vartheta, s], \quad (1.136)$$

$$\rho = \min_{\vartheta \in \Theta} \max_{[0,T]} I[\vartheta, s] = \max_{\vartheta \in \Theta} \min_{[0,T]} I[\vartheta, s]. \quad (1.137)$$

Здесь

$$I[\vartheta, s] = E \int_s^{\infty} z^T(t) Q(t) z(t) dt, \quad (1.138)$$

где $z(t) = z(\vartheta, t)$ – решение уравнения (1.135) с $\vartheta(t) \in \Theta$.

Таким образом, задача построения оценок спектрального радиуса оператора \mathcal{B} сводится к задаче оптимизации (1.136), (1.137) традиционного квадратичного интегрального функционала (1.138) для системы (1.135).

П р и м е р

Рассмотрим одномерное уравнение (1.124)

$$dx = a(t)xdt + \sqrt{q(t)x^2}d\eta, \quad E(d\eta)^2 = dt. \quad (1.139)$$

Из (1.113), (1.138) следует, что $I[\vartheta, s] = v(s)$, где $v(t)$ – T -периодическое решение уравнения

$$\dot{v} + 2(a(t) + \vartheta(t))v + q(t) = 0.$$

Из теоремы 1.7 следует, что $v(t) \equiv \rho = \rho(\mathcal{P})$ для $\bar{\vartheta}(t) = \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)}$, где $\mu(t)$ – собственная функция оператора \mathcal{B} . Следовательно, спектральный радиус ρ удовлетворяет уравнению

$$2(a(t) + \bar{\vartheta}(t))\rho + q(t) = 0.$$

Интегрируя это уравнение с условием $\int_0^T \bar{\vartheta}(t) dt = 0$, получаем

$$2\rho \int_0^T a(t) dt + \int_0^T q(t) dt = 0$$

и, как следствие,

$$\rho = -\frac{\int_0^T q(t)dt}{2 \int_0^T a(t)dt}.$$

Таким образом, неравенство

$$\int_0^T (2a(t) + q(t))dt < 0$$

является необходимым и достаточным условием устойчивости системы (1.139).

Представленные в данном разделе результаты опубликованы в [249]. Разработка методов численного анализа устойчивости стохастических систем с периодическими коэффициентами, опирающихся на критерий теоремы 1.8, была продолжена в работе [32], где, в частности, удалось построить двумерную бифуркационную диаграмму, иллюстрирующую зоны устойчивости и неустойчивости стохастического уравнения Матье.

2. Стохастическая чувствительность

2.1. Функция стохастической чувствительности

Рассмотрим детерминированную систему (1.1) с гладким компактным инвариантным многообразием $M \subset \mathbb{R}^n$. Предполагается, что многообразие M является экспоненциально устойчивым (см. определение 1.1). В данной главе при исследовании чувствительности многообразия M к случайным возмущениям будет использоваться система стохастических уравнений Ито:

$$dx = f(x) dt + \varepsilon \sigma(x) dw(t), \quad x, f \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Здесь $w(t)$ – n -мерный винеровский процесс, $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $n \times n$ -матричная функция, задающая зависимость возмущений от состояния системы, ε – параметр интенсивности возмущений.

В результате действия стохастических невырожденных возмущений ($\sigma(x)|_M \neq 0$) случайные траектории системы (2.1) покидают многообразие M и формируют вокруг него некоторый пучок.

Детальное вероятностное описание случайных траекторий в этом пучке в терминах плотности распределения дается уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК).

Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет установившийся в системе режим стохастических автоколебаний, то можно ограничиться рассмотрением стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК. Непосредственное использование этого уравнения даже в простейших ситуациях (например, когда рассматривается стационарно-распределенное состояние автоколебательной системы с одной степенью свободы) весьма затруднительно. Важный для практики случай – воздействия малых помех – приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных.

В настоящее время известны различные подходы, позволяющие для искомых вероятностных характеристик найти соответствующие приближения. Разработан метод, основанный на замене исследуемого процесса на эквивалентный гауссовский. Аналитически этот метод сводится к обрыву бесконечномерной последовательности уравнений для моментов высших порядков, когда ограничиваются лишь первыми двумя моментами. Для случая квазигармонических колебаний данный прием использовался в [263]. Подход, связанный со стохастическим

усреднением в русле метода малого параметра теории возмущений, рассмотрен в работах [111] и [37].

2.1.1. Квазипотенциал и его аппроксимация

Для систем с малыми случайными возмущениями в работе А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина [26] предложен подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова – *квазипотенциал*, с помощью которой можно находить асимптотики ряда важных вероятностных характеристик выхода случайных траекторий из области (задача о выбросах), содержащей устойчивое предельное множество исходной детерминированной системы. Применительно к точке покоя данный подход в рамках теории больших уклонений развивался в работах [159, 173]. Метод квазипотенциала для предельного цикла рассматривался в работах [90, 169, 170, 171, 191, 192, 230, 240, 262], а для более сложных фрактальных аттракторов – в [174, 193]. Теории больших уклонений в анализе стохастических дифференциальных уравнений на торе посвящена работа [27].

Рассмотрим асимптотику стационарной плотности распределения случайных траекторий системы (2.1) с невырожденными шумами ($\det \sigma(x)|_{\mathcal{M}} \neq 0$) вблизи компактного инвариантного многообразия \mathcal{M} . Для малых шумов эта асимптотика имеет вид

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp \left(-\frac{v(x)}{\varepsilon^2} \right),$$

где $v(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \rho(x, \varepsilon)$ – квазипотенциал.

Квазипотенциал $v(x)$ связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \sigma(x) \sigma^\top(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.2)$$

с условиями

$$v|_{\mathcal{M}} = 0, \quad v|_{U \setminus \mathcal{M}} > 0.$$

Квазипотенциал $v(x)$ в окрестности U многообразия \mathcal{M} является \mathcal{M} -квадратичной функцией Ляпунова и позволяет показать \mathcal{E} -устойчивость многообразия \mathcal{M} для системы (1.1). Действительно, функция $v(x)$, будучи решением уравнения Гамильтона – Якоби (2.2), удовлетворяет соотношению

$$\left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -w(x),$$

где

$$w(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \sigma(x) \sigma^\top(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Для невырожденных шумов функция $w(x)$ также является \mathcal{M} -квадратичной, что по теореме 1.1 означает \mathcal{E} -устойчивость многообразия \mathcal{M} .

Уравнение Гамильтона – Якоби выглядит проще, нежели исходное уравнение ФПК, однако и его точное решение является по-прежнему весьма сложной задачей. Здесь возможен конструктивный подход, связанный с введением еще одной асимптотики – малой окрестности исследуемого аттрактора. Для случаев точки покоя и предельного цикла соответствующие аппроксимации квазипотенциала исследовались в [90, 175, 230, 240, 262].

Локальная аппроксимация квазипотенциала вблизи инвариантного многообразия

Квазипотенциал $v(x)$ достигает минимума на многообразии \mathcal{M} , где вместе со своими частными производными первого порядка равен нулю. Поэтому первым приближением функции $v(x)$ вблизи \mathcal{M} является квадратичная форма

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (\Delta(x), \Psi(\gamma(x)) \Delta(x)), \quad v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3),$$

задаваемая определенной на M функцией $\Psi(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)$.

В каждой точке x многообразия M значение $\Psi(x)$ – симметрическая неотрицательно определенная $n \times n$ -матрица. Поскольку $v(x)$ – M -квадратичная функция, то $\Psi(x) \in \mathcal{K}_P$ (см. предложение 1.3). Рассмотрим наряду с $\Psi(x)$ матричную функцию $\Phi(x) = \Psi^+(x)$, где $+$ означает псевдообращение. Отметим, что $\Phi(x) \in \mathcal{K}_P$.

Полученная аппроксимация $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))$ квазипотенциала $v(x)$ позволяет представить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \exp \left(- \frac{(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))}{2\varepsilon^2} \right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 \Phi(x)$. Эта матрица характеризует разброс случайных траекторий системы (2.1) в точке x многообразия M .

Пусть $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \geq \dots \geq \lambda_n(x)$ – собственные числа, а $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$ – ортонормированный базис собственных векторов матрицы $\Phi(x)$. Поскольку при каждом $x \in M$ матрица $\Phi(x)$ вырождена ($\Phi(x) \in \mathcal{K}_P$, $\text{rank} \Phi(x) = n - s$), то $\lambda_{n-s+1}(x) = \dots = \lambda_n(x) \equiv 0$. Соответствующие собственные векторы $h_{n-s+1}(x), \dots, h_n(x)$ лежат в касательном подпространстве T_x . Остальные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}$, при невырождающихся на M шумах ($\det \sigma(x)|_M \neq 0$), строго положительны и задают при каждом x разброс случайных траекторий в направлении векторов h_1, \dots, h_{n-s} базиса ортогонального подпространства N_x .

2.1.2. Параметризация функции стохастической чувствительности

Матрица $\Phi(x)$ характеризует реакцию системы (2.1) вблизи многообразия M на случайные входные воздействия. Если си-

стему (2.1) рассматривать как некоторый преобразователь стохастического входа (стационарный винеровский процесс $w(t)$) в стохастический выход (стационарное распределение случайных траекторий вокруг M), то ее собственные значения задают коэффициенты усиления ($\lambda_i > 1$) и ослабления ($\lambda_i < 1$) этого преобразователя. Функция $\Phi(x)$ – *функция стохастической чувствительности* (ФСЧ) – позволяет описать неравномерность разброса случайных траекторий около многообразия по всем направлениям, указать участки многообразия, наиболее и наименее чувствительные к помехам.

Конструкция функции стохастической чувствительности была введена в [14] в качестве достаточно простого и естественного инструмента анализа стохастически возмущенных предельных циклов и разрабатывалась далее в работах [15, 16, 17, 143, 144, 145, 146, 147].

Пусть x – произвольная фиксированная точка многообразия M . Выходящее из этой точки решение $x(t) = X(t, x)$ ($X(0, x) = x$) системы (1.1) позволяет для функции $\Psi(x)$ получить параметрическое представление, связанное со скалярной переменной $t \in \mathbb{R}^1$:

$$V(t) = \Psi(x(t)).$$

При этом $V(t) \in \mathcal{K}_P^x \subset \mathcal{K}^x \subset \Sigma^x$. Напомним (см. (1.43)), что множество \mathcal{K}_P^x является внутренностью конуса \mathcal{K}^x , лежащего в пространстве Σ^x .

Дифференцируя уравнение Гамильтона – Якоби (2.2) в предположении достаточной гладкости квазипотенциала $v(x)$ и подставляя $x = x(t)$, получим для $V(t) = \Psi(x(t)) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x(t))$ матричное дифференциальное уравнение Бернулли

$$\dot{V} + F^\top(t)V + VF(t) + VS(t)V = 0, \quad (2.3)$$

где

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t)) , \quad S(t) = \sigma(x(t))\sigma^\top(x(t)) , \quad P(t) = P_{x(t)}.$$

Рассмотрим для уравнения Бернулли (2.3) соответствующее линейное уравнение

$$\dot{W} = F(t)W + WF^\top(t) + P(t)S(t)P(t). \quad (2.4)$$

Ниже будет показано (см. теорему 2.1), что это линейное матричное уравнение имеет в Σ^x единственное решение $W(t)$. Связь функций $V(t)$ и $W(t)$ – решений (2.3), (2.4) – дается следующей леммой.

Лемма 2.1. Если матричная функция $W(t) \in \mathcal{K}_P^x$ является решением уравнения (2.4), то функция $V(t) = W^+(t) \in \mathcal{K}_P^x$ является решением уравнения (2.3).

Если матричная функция $V(t) \in \mathcal{K}_P^x$ является решением уравнения (2.3), то функция $W(t) = V^+(t) \in \mathcal{K}_P^x$ является решением уравнения (2.4).

Доказательство. Пусть функция $W(t) \in \mathcal{K}_P^x$ является решением уравнения (2.4). Умножая уравнение (2.4) слева и справа на $V(t) = W^+(t) \in \mathcal{K}_P^x$, получим

$$V\dot{W}V = VFP + PF^\top V + VSV. \quad (2.5)$$

Здесь $\dot{W} = \frac{dW}{dt}$. Дифференцируя равенство $V = VWV$ по переменной t , получим $\dot{V} = \dot{V}P + V\dot{W}V + P\dot{V}$, откуда следует $V\dot{W}V = \dot{V} - \dot{V}P - P\dot{V}$. Умножая последнее равенство слева и справа на P , получим $V\dot{W}V = -P\dot{V}P$, откуда, с учетом (2.5), следует

$$P[\dot{V} + VF + F^\top V + VSV]P = 0. \quad (2.6)$$

Для произвольного вектора $r = r(t)$ из $T_{x(t)}$, с учетом $Vr = 0$, выполняется

$$[\dot{V} + VF + F^\top V + VSV]r = [\dot{V} + VF]r = [\dot{V}r] = 0. \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) следует, что $V = W^+$ – решение (2.3).

Обратное утверждение доказывается аналогично.

В результате для функции стохастической чувствительности $\Phi(x)$ на решении $x(t) = X(t, x)$ получаем параметрическое представление $W(t) = \Phi(x(t))$.

Уравнение (2.4), введенное здесь с помощью конструкции квазипотенциала, можно получить другим способом, использующим системы первого приближения.

2.1.3. Связь с системами первого приближения

Пусть x_0 – произвольная фиксированная точка, лежащая на многообразии \mathcal{M} . В силу инвариантности \mathcal{M} соответствующее решение $x(t)$ детерминированной системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}$ при всех $t > 0$ принадлежит \mathcal{M} . Рассмотрим решение $\tilde{x}(t)$ стохастической системы (2.1) с тем же начальным условием $\tilde{x}(0) = x_0$. Под действием случайных возмущений траектория $\tilde{x}(t)$, удаляясь от $x(t)$, покидает и многообразие \mathcal{M} . Рассмотрим отклонение $z(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ возмущенного решения $\tilde{x}(t)$ от невозмущенного $x(t)$. При малых ε отклонение $z(t)$ мало, что позволяет для описания динамики пары $x(t)$, $z(t)$ использовать систему (стохастическое линейное расширение):

$$\begin{aligned} dx &= f(x) dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= F(x)zdt + \varepsilon\sigma(x)dw(t), & z &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$F(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x).$$

В системе (2.8) учтены только члены первого порядка малости по ε и z . В исследовании разброса стохастически возмущенных траекторий $\tilde{x}(t)$ вокруг многообразия \mathcal{M} нас интересует не столько динамика самих отклонений $z(t)$, сколько поведение

их проекций $P_{x(t)}z(t)$ на нормаль $N_{x(t)}$ к \mathcal{M} в текущей точке невозмущенного решения $x(t)$. Естественной детерминированной характеристикой разброса таких проекций является ковариационная матрица

$$D(t) = \text{cov}(P_{x(t)}z(t), P_{x(t)}z(t)).$$

Отметим, что $D(t) = P_{x(t)}Z(t)P_{x(t)}$, где ковариационная матрица $Z(t) = \text{cov}(z(t), z(t))$ отклонения $z(t)$ связана с $x(t)$ системой:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ \dot{Z} &= F(x)Z + ZF^\top(x) + \varepsilon^2 S(x),\end{aligned}\tag{2.9}$$

где

$$S(x) = \sigma(x)\sigma^\top(x).$$

При малых ε матрица D мала. В качестве меры стохастической чувствительности естественно взять отношение

$$W = \frac{1}{\varepsilon^2} D.$$

При этом $W(t) = P_{x(t)}U(t)P_{x(t)}$. Здесь $U(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}Z(t)$, являясь ковариационной матрицей решений $u = \frac{1}{\varepsilon}z$ стохастической системы

$$\begin{aligned}dx &= f(x) dt, \\ du &= F(x)u dt + \sigma(x)dw(t),\end{aligned}\tag{2.10}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ \dot{U} &= F(x)U + UF^\top(x) + S(x).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Рассмотрим наряду с (2.10) систему

$$\begin{aligned}dx &= f(x) dt, \\ dy &= F(x)y dt + P_x \sigma(x)dw(t).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Ковариационная матрица $V(t) = \text{cov}(y(t), y(t))$ ее решений $y(t)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ \dot{V} &= F(x)V + VF^\top(x) + P_x S(x)P_x.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Пусть x – произвольная точка многообразия \mathcal{M} . Выходящее из этой точки решение $x(t) = X(t, x)$ ($X(0, x) = x$) системы (1.1) позволяет для всех функций, участвующих в описании рассматриваемой задачи и изначально заданных на \mathcal{M} , получить параметрическое представление, связанное со скалярной переменной $t \in \mathbb{R}^1$:

$$F(t) = F(x(t)), \quad G(t) = \sigma(x(t)), \quad P(t) = P_{x(t)}, \quad S(t) = S(x(t)).$$

При этом (см. (1.43)) элементами пространства Σ^x , конуса \mathcal{K}^x и множества \mathcal{K}_P^x становятся соответствующие, уже заданные на \mathbb{R}^1 , симметрические $n \times n$ -матричные функции $V(t) = V(x(t))$.

Значения оператора \mathcal{A} на Σ^x определяются (см. 1.44) равенством

$$\mathcal{A}[V] = \dot{V} + F^\top(t)V + VF(t).$$

Для скалярного произведения элементов $V, W \in \Sigma^x$, задаваемого равенством

$$\langle V, W \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr}(V(t)W(t))dt,$$

сопряженным к \mathcal{A} будет оператор

$$\mathcal{A}^*[W] = -\dot{W} + F(t)W + WF^\top(t).$$

Теорема 2.1. Пусть детерминированное линейное расширение (1.21) является P -устойчивым. Тогда для любого $x \in \mathcal{M}$ справедливы утверждения:

а) матричное уравнение (2.4) имеет в пространстве Σ^x единственное решение $W(t) \in \mathcal{K}^x$. Если матрица $S(t) \in \mathcal{K}_P^x$, то $W(t) \in \mathcal{K}_P^x$;

б) система (2.12) имеет решение $\bar{y}(t)$ с ковариационной матрицей $\text{cov}(\bar{y}(t), \bar{y}(t)) = W(t)$;

в) для всякого решения $y(t)$ системы (2.12) проекция $P(t)V(t)P(t)$ ковариационной матрицы $V(t) = \text{cov}(y(t), y(t))$ сходится к матрице $W(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(t)V(t)P(t) - W(t)) = 0;$$

г) для всякого решения $y(t)$ системы (2.12) проекция $P(t)y(t)$ сходится в среднем квадратичном к $\bar{y}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E\|P(t)y(t) - \bar{y}(t)\|^2 = 0;$$

д) для всякого решения $u(t)$ системы (2.10) проекция $P(t)U(t)P(t)$ ковариационной матрицы $U(t) = \text{cov}(u(t), u(t))$ сходится к матрице $W(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(t)U(t)P(t) - W(t)) = 0;$$

е) для всякого решения $u(t)$ системы (2.10) проекция $P(t)u(t)$ сходится в среднем квадратичном к $\bar{y}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E\|P(t)u(t) - \bar{y}(t)\|^2 = 0.$$

Доказательство. Пусть система (1.21) является P -устойчивой. Тогда оператор \mathcal{A} обратим, и, следовательно, имеет обратный и оператор \mathcal{A}^* .

Рассмотрим матрицу $W = -(\mathcal{A}^*)^{-1}[PSP] \in \mathcal{K}^x$. Эта матрица является единственным в Σ^x решением уравнения (2.4). Если $S \in \mathcal{K}_P^x$, то $W(t) \in \mathcal{K}_P^x$.

Утверждение а) доказано.

Доказательство утверждения б) легко получается, если взять $\bar{y}(0)$ такое, что $\text{cov}(\bar{y}(0), \bar{y}(0)) = W(0)$.

Докажем утверждение в). Из уравнения (2.13) и равенства $W(t) = P(t)W(t)P(t)$ следует равенство

$$P(t)V(t)P(t) - W(t) = P(t)\Delta(t)P(t).$$

Здесь $\Delta(t) = V(t) - W(t)$ является решением однородного уравнения

$$\dot{\Delta} = F(t)\Delta + \Delta F^{\top}(t).$$

Матрица $\Delta(t)$ имеет явное представление $\Delta(t) = Z(t)\Delta(0)Z^{\top}(t)$, где $Z(t)$ является фундаментальной матрицей системы

$$dz = F(t)zdt. \quad (2.14)$$

В условиях P -устойчивости системы (1.21) мы имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)Z(t) = 0.$$

Следовательно, проекция $P(t)V(t)P(t)$ сходится к матрице $W(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Утверждение г) следует из в) и соотношений

$$E\|P(t)y(t) - \bar{y}(t)\|^2 \leq 2E\|P(t)y(t) - P(t)\bar{y}(t)\|^2 + 2E\|P(t)\bar{y}(t) - \bar{y}(t)\|^2,$$

$$E\|P(t)y(t) - P(t)\bar{y}(t)\|^2 = \text{tr}(P(t)\Delta(t)P(t)),$$

$$E\|P(t)\bar{y}(t) - \bar{y}(t)\|^2 = \text{tr}((P(t) - I)W(t)(P(t) - I)) = 0.$$

Для доказательства утверждений д) и е) потребуется следующая лемма.

Лемма 2.2. Для любого решения $u(t)$ системы (2.10) найдется решение $y(t)$ системы (2.12) такое, что

$$P(t)u(t) \equiv P(t)y(t). \quad (2.15)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное решение $u(t)$ системы (2.10). Пусть $y(t)$ – решение уравнения (2.12) с начальным условием $y(0) = u(0)$. Тогда разность $\psi = u - y$ удовлетворяет уравнению

$$d\psi = F(t)\psi dt + (I - P(t))G(t)dw(t),$$

где $G(t) = \sigma(x(t))$, $\psi(0) = 0$, и может быть записана в виде

$$\psi(t) = \int_0^t Z(t-s)(I - P(s))G(s)dw(s),$$

где $Z(t)$ – фундаментальная матрица системы (2.14). Теперь требуемое для доказательства леммы тождество $P(t)\psi(t) \equiv 0$ следует из замечания 1.1.

Лемма 2.2 доказана.

Перейдем к доказательству утверждения д). Из тождества (2.15) следует, что

$$P(t)U(t)P(t) \equiv P(t)V(t)P(t)). \quad (2.16)$$

Теперь утверждение д) следует из (2.15) и в).

Доказательство утверждения г) следует из леммы 2.2 и д). Теорема 2.1 доказана.

Данная теорема есть общий вариант результатов, опубликованных в [146] для случая предельного цикла.

Из доказанной теоремы 2.1 следует, что интересующая нас проекция $P(t)u(t)$ решения системы (2.10), характеризующая чувствительность детерминированного решения $x(t)$ к случайным возмущениям в направлении текущей нормали $N_{x(t)}$ к \mathcal{M} , при $t \rightarrow \infty$, независимо от выбора $u(0)$, сходится к некоторому случайному процессу $\bar{y}(t)$ – решению системы (2.12). При этом ковариационная матрица проекции $P(t)u(t)$ сходится к

некоторой матрице $W(t)$ – единственному решению уравнения (2.4).

Матрица W играет центральную роль в данной главе, так как является функцией стохастической чувствительности многообразия \mathcal{M} . Значения $W(t)$ определяют эту чувствительность в текущей точке $x(t)$ многообразия. При этом матрица $\varepsilon^2 W(t)$ задает ковариацию разброса случайных траекторий нелинейной системы (2.1) в их сечении с нормальной гиперплоскостью $N_{x(t)}$.

2.2. Стохастическая чувствительность точки покоя

В простейшем случае, когда многообразие \mathcal{M} состоит из единственной точки покоя \bar{x} ($\mathcal{M} = \{\bar{x}\}$, \bar{x} – Э-устойчива для (1.1)), стохастическая чувствительность системы (2.1) характеризуется постоянной матрицей W – решением алгебраического уравнения

$$FW + WF^\top = -S, \quad (2.17)$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = GG^\top, \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

Для Э-устойчивой точки \bar{x} матрица F является устойчивой (спектр лежит в левой полуплоскости). Здесь матрица W задает ковариацию ($W = \text{cov}(\bar{y}, \bar{y})$) стационарно распределенного состояния \bar{y} системы

$$dy = Fydt + Gdw(t). \quad (2.18)$$

Существование стационарно распределенного состояния у системы (2.18), как и однозначная разрешимость уравнения (2.17), следует из устойчивости матрицы F . Матрица $\varepsilon^2 W$ является

ковариационной матрицей стационарно распределенного состояния линейной системы

$$dz = Fzdt + \varepsilon Gdw(t), \quad (2.19)$$

являющейся системой первого приближения для нелинейной стохастической системы (2.1) вблизи \bar{x} . При этом матрица $\varepsilon^2 W$, являясь соответствующим приближением для ковариационной матрицы стационарно распределенного состояния нелинейной системы (2.1), задает разброс случайных траекторий (2.1) вокруг точки \bar{x} .

Пример. Стохастическая чувствительность равновесия осциллятора Ван-дер-Поля

Рассмотрим стохастическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \delta x_2(1 - x_1^2) + \varepsilon \dot{w}, \end{cases}$$

полученную добавлением малых случайных возмущений в классическую модель – осциллятор Ван-дер-Поля [85]. Здесь δ – параметр нелинейности, $w(t)$ – скалярный стандартный винеровский процесс, а ε – интенсивность случайной помехи.

Система первого приближения (2.19) для рассматриваемой точки покоя $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$ имеет вид

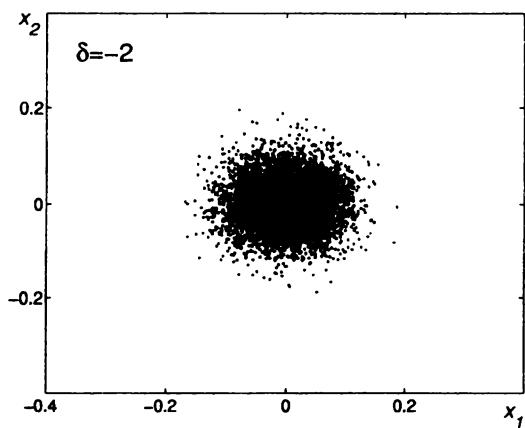
$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 + \delta z_2 + \varepsilon \dot{w} \end{cases}$$

или в векторной записи

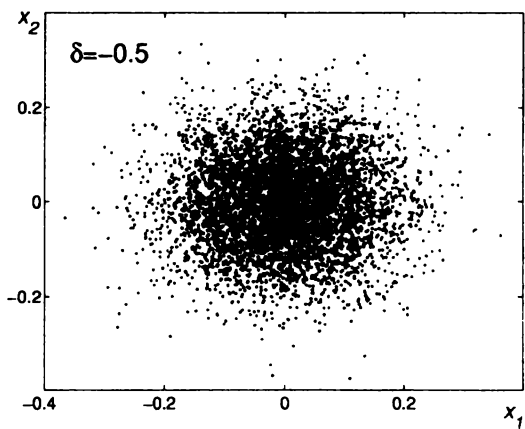
$$\dot{z} = Fz + \varepsilon g\dot{w},$$

где

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



a



б

Рис. 2.1. Случайные состояния стохастического осциллятора
Ван-дер-Поля при $\varepsilon = 0.1$:
a – для $\delta = -2$; *б* – для $\delta = -0.5$

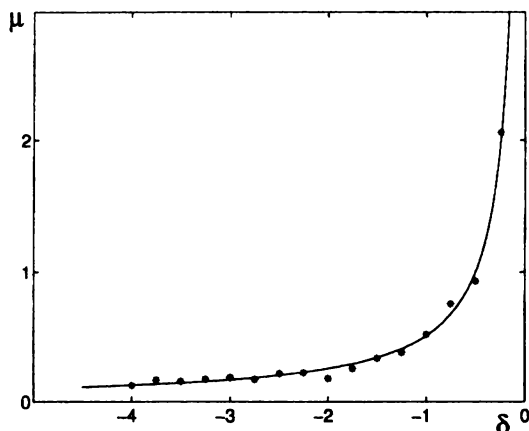


Рис. 2.2. Стохастическая чувствительность точки покоя осциллятора Ван-дер-Поля

Исследуем разброс случайных траекторий стохастической модели Ван-дер-Поля вокруг точки покоя. При значении параметра $\delta < 0$ точка покоя устойчива. Это гарантирует существование стационарного распределения с некоторой ковариационной матрицей $\varepsilon^2 W$. Здесь матрица стохастической чувствительности $W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ является (см. (2.17)) решением уравнения

$$FW + WF^T = -gg^T.$$

Ее элементы равны:

$$w_{11} = w_{22} = -\frac{1}{2\delta}, \quad w_{12} = w_{21} = 0.$$

Как видим, при любом $\delta < 0$ ковариационная матрица стационарного распределения диагональна. Равенство нулю недиагональных элементов ($w_{21} = w_{12} = 0$) матрицы чувствительности означает, что координаты случайных отклонений от рав-

новесия в направлении осей координат не коррелируют друг с другом. Совпадение диагональных элементов ($w_{11} = w_{22}$) означает, что разброс случайных траекторий вокруг точки покоя по всем направлениям одинаков. Эллипсом рассеивания является окружность. Функция стохастической чувствительности $\mu(\delta) = w_{11}(\delta) = w_{22}(\delta) = -\frac{1}{2\delta}$ монотонно возрастает и при приближении δ к бифуркационному значению $\delta = 0$ стремится к бесконечности.

На рис. 2.1 представлены случайные состояния системы при $\varepsilon = 0.1$ для $\delta = -2$ и $\delta = -0.5$. Как видим, рост чувствительности ведет к увеличению разброса случайных траекторий вокруг точки покоя.

Разброс случайных траекторий системы вдоль оси OX в зависимости от параметра нелинейности δ и помех интенсивности ε будем характеризовать эмпирической дисперсией $D(\delta, \varepsilon)$. Функция $\bar{\mu}(\delta, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} D(\delta, \varepsilon)$ играет роль эмпирической функции чувствительности точки покоя.

На рис. 2.2 сплошной линией изображен график $\mu(\delta)$, а звездочками представлены значения $\bar{\mu}(\delta, \varepsilon)$, вычисленные при $\varepsilon = 0.1$ по случайным траекториям, полученным прямым численным моделированием.

Как видно из рисунка, функция стохастической чувствительности $\mu(\delta)$, аналитически найденная по линейной системе первого приближения, хорошо согласуется с эмпирическими данными, полученными моделированием нелинейной стохастической системы.

2.2.1. Системы с ненормальными матрицами

Рассмотрим связь величины разброса случайных траекторий линейной системы (2.19) вокруг равновесия $z = 0$ со свойствами матрицы F .

Основными характеристиками F являются ее собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

В одномерном случае ($F = \lambda_1$) система (2.19) имеет вид

$$dz = \lambda_1 z dt + \varepsilon G dw.$$

Чувствительность W точки покоя $z = 0$ и дисперсия D стационарного решения легко находятся

$$W = -\frac{G}{2\lambda_1}, \quad D = \varepsilon^2 W = -\frac{\varepsilon^2 G}{2\lambda_1}.$$

При $\lambda_1 \rightarrow -\infty$ дисперсия $D \rightarrow 0$: чем больше степень устойчивости одномерной системы, тем меньше ее стохастическая чувствительность и разброс случайных траекторий.

В случае размерности два и выше существенную роль начинает играть структура матрицы F . Для диагональных F картина такая же, как и в одномерном случае. Иначе дело обстоит для так называемых ненормальных матриц, у которых $FF^\top \neq F^\top F$.

В качестве примера рассмотрим двумерную систему

$$dz_1 = (\lambda_1 z_1 + R z_2) dt + \varepsilon g_1 dw_1$$

$$dz_2 = \lambda_2 z_2 dt + \varepsilon g_2 dw_2$$

с параметрами

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & R \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь элементы матрицы стохастической чувствительности

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \text{ удовлетворяют (см. (2.17)) системе}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 w_{11} + 2R w_{12} = g_1^2 \\ (\lambda_1 + \lambda_2) w_{12} + R w_{22} = 0 \\ 2\lambda_2 w_{22} = -g_2^2, \end{cases}$$

из которой получаем

$$w_{11} = -\frac{1}{2\lambda_1} \left(g_1^2 + \frac{R^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2} g_2^2 \right),$$

$$w_{12} = \frac{Rg_2^2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2},$$

$$w_{22} = -\frac{g_2^2}{2\lambda_2}.$$

При $R = 0$ матрица F диагональна, и все выглядит, как в одномерном случае.

Для фиксированного значения $R \neq 0$ при $\lambda_{1,2} \rightarrow -\infty$ имеем $w_{ij} \rightarrow 0$. Если же параметр R , характеризующий степень ненормальности системы, увеличивается, то картина будет иной. Отметим, что мерой ненормальности может служить норма следующей разности

$$FF^\top - F^\top F = \begin{bmatrix} R^2 & (\lambda_2 - \lambda_1)R \\ (\lambda_2 - \lambda_1)R & R^2 \end{bmatrix}.$$

Для наглядности рассмотрим случай, когда все элементы матрицы F зависят от одного параметра $\alpha > 0$:

$$\lambda_1 = -\alpha, \lambda_2 = -\alpha, R = \alpha^2.$$

В этом случае

$$\|FF^\top - F^\top F\| = \alpha^4$$

и

$$w_{11} = \frac{g_1^2}{2\alpha} + \frac{\alpha g_2^2}{4}, \quad w_{12} = \frac{g_2^2}{4}, \quad w_{22} = \frac{g_2^2}{2\alpha}.$$

Как видим, здесь параметр α характеризует степень ненормальности матрицы F . Увеличение параметра α ведет к уменьшению собственных значений λ_1 и λ_2 , что означает увеличение степени детерминированной устойчивости равновесия $z = 0$.

Казалось бы, при этом и стохастическая чувствительность системы должна уменьшаться. Однако, вследствие роста ненормальности системы, элементы матрицы чувствительности ведут себя по-разному:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} w_{11}(\alpha) = \infty,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} w_{22}(\alpha) = 0,$$

а w_{12} от параметра α вообще не зависит.

В результате при $\alpha \rightarrow \infty$ разброс случайных траекторий по разным направлениям будет совершенно различным: дисперсия первой координаты системы стремится к бесконечности, несмотря на увеличение степени детерминированной устойчивости ($\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda_{1,2}(\alpha) = -\infty$), дисперсия второй координаты стремится к нулю.

Этот пример демонстрирует общее свойство ненормальных систем – высокую чувствительность к возмущениям. Отмеченное свойство ненормальности приводит порой к неожиданным (с точки зрения классической теории детерминированной устойчивости) качественным эффектам в поведении физических систем.

2.2.2. Индуцированный шумами переход к турбулентности

Одним из актуальных разделов естествознания, где находит применение современная теория устойчивости вероятностных нелинейных процессов, является стохастический анализ динамических систем при переходе от ламинарного режима к турбулентному. В последние годы и особенно после оригинальной работы [268] активно развивается теория такого перехода, основанная на свойстве ненормальности оператора динамической системы. Ненормальность линеаризованного уравнения

Навье – Стокса приводит к всплеску возмущений даже в случае устойчивости равновесного состояния. Нелинейность системы приводит к дальнейшему усилению малых начальных возмущений. В результате переход к турбулентности происходит не вследствие линейной неустойчивости стационарного ламинарного потока, а в результате сочетания ненормальности, порождающей высокую чувствительность к возмущениям, и нелинейности, переводящей систему в бассейн притяжения турбулентного режима. Исследованию этого явления, названного субкритическим переходом, посвящены работы [140, 141, 160, 168, 190, 194, 259].

Некоторые теоретические исследования, посвященные стохастически возмущенным динамическим системам с ненормальным оператором, представлены работами [149, 177, 178].

Главные черты взаимодействия трех факторов – нелинейности, ненормальности и стохастической чувствительности – можно проиллюстрировать на следующей динамической системе:

$$\begin{aligned} du &= (-2\epsilon u + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} v) dt, \\ dv &= (-\epsilon v + u - (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} u) dt, \end{aligned} \tag{2.20}$$

где ϵ – малый параметр, связанный с числом Рейнольдса R : $\epsilon = 1/R$. Эта динамическая система была предложена в [268] в качестве простой модели для объяснения субкритического перехода в уравнениях Навье – Стокса. Следует отметить, что ряд других моделей малой размерности были предложены для объяснения возникновения турбулентного режима при больших числах Рейнольдса (см., например, [141, 190, 194]). Эта динамическая система имеет три точки равновесия, включая $(0, 0)$. Главная ее особенность состоит в том, что при $\epsilon \ll 1$ линеаризованный эволюционный оператор для точки $(0, 0)$ задается ненормальной матрицей, что приводит к первоначаль-

ному большому росту $v(t)$ перед последующим экспоненциальным убыванием. Действительно, для ненулевых начальных условий $u(0) = \varepsilon u_0$ и $v(0) = 0$ решение линеаризованных уравнений имеет вид $v(t) = u_0(e^{-\varepsilon t} - e^{-2\varepsilon t})$, $u(t) = \varepsilon u_0 e^{-2\varepsilon t}$. Функция $v(t)$ достигает максимума $\max v = \frac{1}{4}u_0$ при значении $t = \frac{1}{\varepsilon} \ln 2$. Таким образом, несмотря на то, что оба собственных значения отрицательные:

$$\lambda_1 = -\varepsilon, \quad \lambda_2 = -2\varepsilon,$$

малые начальные возмущения могут привести к существенному отклонению траекторий от равновесия $(0, 0)$. В работе [268] показано, что бассейн притяжения равновесия $(0, 0)$ сжимается очень быстро при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Стохастическая динамика модели и ненормальность

Рассмотрим динамическую систему (2.20) в присутствии случайных возмущений:

$$\begin{aligned} du &= (-2\varepsilon u + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} v)dt + (2\delta)^{\frac{1}{2}} dw_1(t), \\ dv &= (-\varepsilon v + u - (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} u)dt + (2\delta)^{\frac{1}{2}} dw_2(t), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы, а δ – параметр интенсивности шума.

Рассмотрим для этой нелинейной системы линейное приближение в окрестности равновесия $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} du &= -2\varepsilon u dt + (2\delta)^{\frac{1}{2}} dw_1(t), \\ dv &= (-\varepsilon v + u)dt + (2\delta)^{\frac{1}{2}} dw_2(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для нулевых начальных условий $u(0) = 0$, $v(0) = 0$ вторые моменты решений этой системы могут быть найдены в явном виде:

$$m_1(t) \equiv Eu^2(t) = \frac{\delta}{2\varepsilon}(1 - e^{-4\varepsilon t}),$$

$$m_2(t) \equiv Eu(t)v(t) = -\frac{2\delta}{3\varepsilon^2}e^{-3\varepsilon t} + \frac{\delta}{2\varepsilon^2}e^{-4\varepsilon t} + \frac{\delta}{6\varepsilon^2},$$

$$m_3(t) \equiv Ev^2(t) = \left(-\frac{\delta}{\varepsilon^3} - \frac{\delta}{\varepsilon}\right)e^{-2\varepsilon t} + \frac{4\delta}{3\varepsilon^3}e^{-3\varepsilon t} - \frac{\delta}{2\varepsilon^3}e^{-4\varepsilon t} + \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{\delta}{6\varepsilon^3}.$$

Предельные значения $m_i = \lim_{t \rightarrow \infty} m_i(t)$ равны:

$$m_1 = \frac{\delta}{2\varepsilon}, \quad m_2 = \frac{\delta}{6\varepsilon^2}, \quad m_3 = \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{\delta}{6\varepsilon^3}. \quad (2.23)$$

Из (2.23) следует, что вследствие ненормальности системы (2.22) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и постоянной δ , все вторые моменты стремятся к бесконечности. Стационарный второй момент m_3 является самым чувствительным. Даже при очень слабом шуме, скажем $\delta \sim \varepsilon^2$, для $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $m_3 \rightarrow \infty$.

В этих обстоятельствах интересно исследовать влияние ненормальности на вероятность выхода из бассейна притяжения точки $(0, 0)$ (знаменитая задача Крамера [189, 196]).

Рассмотрим окрестность $U = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 0.01\}$ и вероятность P выхода случайной траектории нелинейной системы (2.21), стартующей из точки $(0, 0)$, из этой окрестности за время $T = 10$.

Результаты расчетов, полученных прямым численным моделированием, представлены на рис. 2.3.

Как видим, даже для очень маленьких интенсивностей шума ($\delta = 10^{-3}$) вероятность выхода P близка к единице. В частности, для $\varepsilon = 2^{-5} \approx 0.03$ и $\delta = 5 \times 10^{-5}$ вероятность выхода превосходит 0.6. Для $\delta = 2 \times 10^{-4}$ вероятность P больше, чем 0.8. Для $\delta = 10^{-3}$ эта вероятность становится очень близкой к единице.

Наряду с исследованием вероятности выхода, интересно рассмотреть некоторые подробности поведения траекторий нелинейной системы (2.21) для различных значений ε и δ .

Результаты, полученные прямым численным моделированием, показали, что при увеличении интенсивности шума δ или

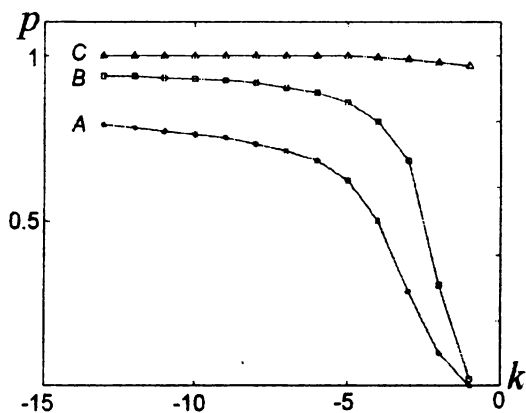


Рис. 2.3. Вероятность выхода p как функция параметра ненормальности $\varepsilon = 2^k$. Кривые A, B, C соответствуют значениям $\delta = 5 \cdot 10^{-5}$, $2 \cdot 10^{-4}$, 10^{-3}

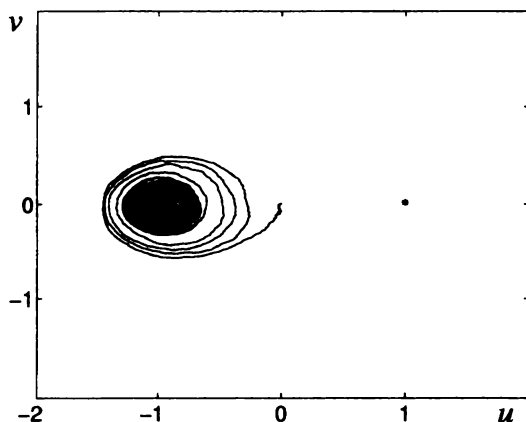


Рис. 2.4. Стохастическая траектория для $\varepsilon = 10^{-2}$, $\delta = 10^{-4}$; начальные значения $u(0) = 0$, $v(0) = 0$

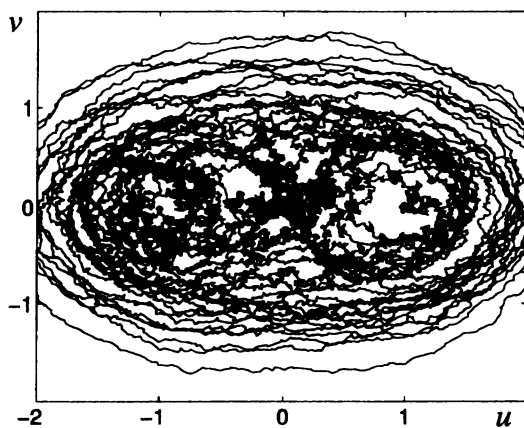


Рис. 2.5. Стохастическая траектория для $\varepsilon = 10^{-2}$, $\delta = 10^{-2}$

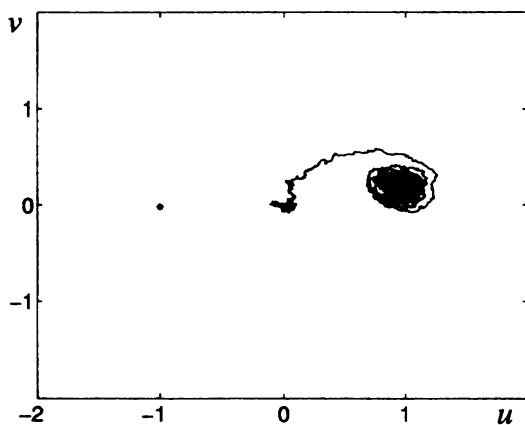


Рис. 2.6. Стохастическая траектория для $\varepsilon = 10^{-1}$, $\delta = 10^{-3}$

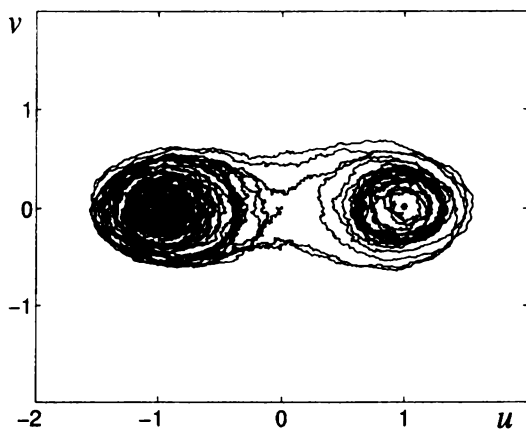


Рис. 2.7. Стохастическая траектория для $\varepsilon = 10^{-2}$, $\delta = 10^{-3}$

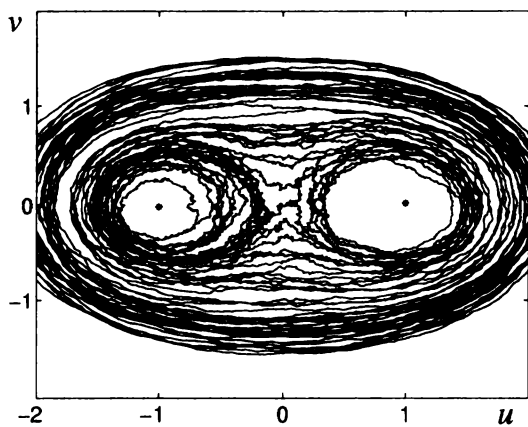


Рис. 2.8. Стохастическая траектория для $\varepsilon = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-3}$

уменьшении параметра ненормальности ε наблюдается серия фазовых переходов.

Здесь возможны три качественно различных режима. Для фиксированного значения ε это явление может быть интерпретировано как индуцированный шумом переход.

Детальное обсуждение и анализ подобных переходов для различных примеров из физики, химии и биологии может быть найдено в [201, 224].

На рис. 2.4 и 2.5 эти переходы представлены стохастическими траекториями ненормальной динамической системы (2.21) для $\varepsilon = 10^{-2}$ и $\delta = 10^{-4}$ (рис. 2.4), $\delta = 10^{-2}$ (рис. 2.5). При очень малых значениях δ ($\delta < 10^{-12}$) случайные траектории концентрируются вокруг положения равновесия $(0, 0)$. При увеличении δ траектории уходят от равновесия $(0, 0)$ и концентрируются в окрестности одного из двух других нетривиальных положений равновесия (рис. 2.4). Дальнейшее увеличение интенсивности шума δ приводит к тому, что стохастические орбиты лежат в области, содержащей все три положения равновесия (рис. 2.5).

Рис. 2.6 – 2.8 иллюстрируют качественные изменения в поведении случайных траекторий для фиксированного значения параметра $\delta = 10^{-3}$ при различных значениях параметра ненормальности $\varepsilon = 10^{-1}$ (рис. 2.6), $\varepsilon = 10^{-2}$ (рис. 2.7) и $\varepsilon = 10^{-3}$ (рис. 2.8). При фиксированном значении параметра интенсивности шума δ здесь можно говорить о фазовых переходах, индуцированных ненормальностью.

Представленные здесь результаты опубликованы в [182].

2.2.3. Стохастическая генерация магнитного поля галактик

Свойство ненормальности играет важную роль и в понимании природы генерации больших магнитных полей в астрофи-

зических объектах. Исследование механизмов генерации является актуальной и трудной проблемой (см. [220, 235, 247, 284]). Хорошо известно, что магнитное поле генерируется турбулентным потоком электропроводящей жидкости. В настоящее время исследован целый ряд моделей, описывающих динамику возникающих магнитных полей [271].

Традиционно явление генерации магнитного поля связывают с потерей устойчивости нулевого равновесия. Стандартная теория детерминированной устойчивости, опирающаяся на анализ собственных значений соответствующих линейных систем первого приближения, позволяет найти критические значения параметров, при которых система из зоны устойчивости (субкритический случай) переходит в зону неустойчивости (суперкритический случай).

С точки зрения классической теории генерация магнитного поля должна наблюдаться лишь в суперкритическом случае. Однако было показано [179, 180, 181], что существуют ситуации, где возможна генерация поля и в зоне параметров, относящихся к субкритическому случаю. Такой субкритический переход из нулевого равновесия в области, где действуют уже значительные по величине магнитные поля, невозможно удовлетворительно объяснить, оставаясь в рамках чисто детерминированной теории. Одновременно было отмечено [180], что в рассматриваемых моделях присутствуют неучтенные флуктуации, которые естественным образом приводят к появлению случайных возмущений в используемых уравнениях динамики. Кроме того, астрономическими наблюдениями было установлено существование для магнитных полей значительных случайных пространственно-временных вариаций, которые не могут быть описаны детерминированными уравнениями.

Важность влияния шума в проблеме динамо сейчас общепризнанна и было сделано несколько попыток учесть воздей-

ствие случайных флуктуаций на процесс магнитной генерации [202, 203, 219]. Стохастическая динамика магнитных полей рассматривалась в [180], где изучался механизм, согласно которому малые возмущения возбуждают значительные магнитные поля. Моделируя флуктуации аддитивным шумом, авторам [180] удалось выяснить решающую роль ненормальности для процесса генерации.

Для одной из базовых моделей динамо исследуем связь случайных возмущений, как внешних (аддитивных), так и параметрических (мультипликативных), со свойством ненормальности.

Следуя [247, 271, 284], рассмотрим аппроксимацию модели динамо тонкой спиральной галактики, связывающую радиальную x и азимутальную y компоненты магнитного поля системой

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\varepsilon a(y)x - \delta b(y)y \\ \dot{y} &= -gx - \varepsilon a(y)y.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Здесь

$$a(y) = \frac{1 + y^2}{1 + 2y^2}, \quad b(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Типичные значения параметров ε и δ для спиральных галактик [247] лежат в диапазоне $0.01 \div 0.1$, коэффициент дифференциального вращения $g \sim 1$.

Положения равновесия системы (2.24) могут быть найдены из уравнений

$$\begin{aligned}\varepsilon a(y)x + \delta b(y)y &= 0, \\ gx + \varepsilon a(y)y &= 0.\end{aligned}$$

Стационарное значение x выражается через y :

$$x = -\frac{\varepsilon a(y)y}{g},$$

при этом y есть решение уравнения

$$\varepsilon^2 a^2(y)y - g\delta b(y)y = 0.$$

Это уравнение всегда имеет тривиальное решение $y = 0$. Другие стационарные точки могут быть найдены из уравнения

$$\varepsilon^2(1 + y^2)^3 - g\delta(1 + 2y^2)^2 = 0.$$

Зависимость решений данного уравнения от параметра g для значений $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.01$ представлена на бифуркационной диаграмме (рис. 2.9). Как видим, у системы (2.24) при изменении g изменяется не только расположение точек покоя, но и их количество.

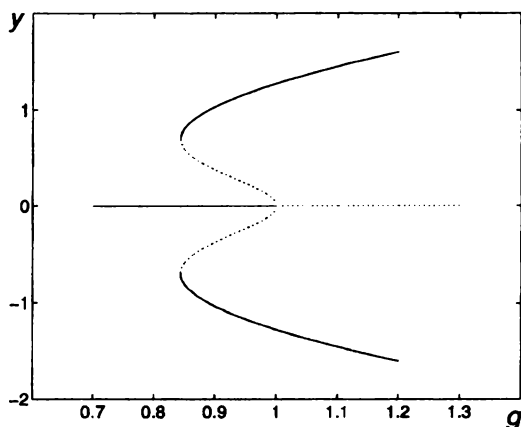


Рис. 2.9. Бифуркационная диаграмма детерминированной системы при $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.01$: сплошная линия – устойчивое равновесие, пунктирная – неустойчивое равновесие

Стандартный анализ устойчивости положения равновесия $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ сводится к исследованию соответствующей линейной системы первого приближения

$$\dot{z} = Az,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -\varepsilon & -\delta \\ -g & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица A имеет два собственных значения:

$$\lambda_1 = -\varepsilon + \sqrt{g\delta}, \quad \lambda_2 = -\varepsilon - \sqrt{g\delta}.$$

Условие устойчивости $\lambda_i < 0$ может быть записано в виде $g\delta < \varepsilon^2$. Это неравенство задает параметры *субкритической* зоны. *Суперкритический* случай соответствует неравенству $g\delta > \varepsilon^2$. Критическим (бифуркационным) значением параметра g , разделяющим эти зоны, является $g^* = \frac{\varepsilon}{\delta^2}$.

Для $\varepsilon = 0.1, \delta = 0.01$ получаем $g^* = 1$. При переходе параметра g через $g^* = 1$ точка покоя $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ теряет устойчивость. Система (2.24) в суперкритической зоне, при $g > g^* = 1$, имеет две симметричные ненулевые устойчивые точки покоя, соответствующие режиму генерации магнитного поля. В субкритической зоне $0.84 < g < g^* = 1$ система (2.24) имеет три устойчивых равновесия, разделенных двумя неустойчивыми. Здесь возможен как режим генерации, так и режим покоя. В зоне $g < 0.84$ с единственной точкой покоя $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ генерация магнитного поля невозможна.

Рассмотрим теперь модель динамо в присутствии случайных флуктуаций:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon a(y)x - \delta b(y)y + \sigma_1 b(y)y\dot{w}_1 + \sigma_2 \dot{w}_2 \\ \dot{y} &= -gx - \varepsilon a(y)y. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь $w_1(t), w_2(t)$ – некоррелированные скалярные винеровские процессы, моделирующие соответствующие параметрические (мультипликативные) и внешние (аддитивные) случайные возмущения с интенсивностями σ_1, σ_2 . Такой выбор случайных

возмущений связан с тем, что в исследуемой системе флуктуации коэффициента δ играют гораздо более важную роль, чем, скажем, возмущения параметров ε и g [180].

Стохастическая модель (2.25) позволяет понять, почему магнитное поле с начальной нулевой амплитудой может с течением времени нарастать даже в субкритическом случае. Ответ на этот вопрос дает анализ ее стохастической чувствительности и устойчивости.

Рассмотрим для нелинейной системы (2.25) линейную аппроксимацию вблизи равновесия $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$:

$$\dot{z} = Az + \sigma_1 G z \dot{w}_1 + \sigma_2 g \dot{w}_2, \quad (2.26)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -\varepsilon & -\delta \\ -g & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Важнейшими статистическими характеристиками этой системы являются вторые моменты, представляющие энергию магнитного поля [180, 181]. Матрица вторых моментов удовлетворяет уравнению

$$\dot{M} = AM + MA^T + (\sigma_1^2 \text{tr}(MQ) + \sigma_2^2)gg^T, \quad Q = GG^T. \quad (2.27)$$

Чувствительность к аддитивным шумам

В отсутствие мультипликативного шума ($\sigma_1 = 0$) для субкритического случая вторые моменты

$$m_1(t) = E(z_1^2), \quad m_2(t) = E(z_1 z_2), \quad m_3(t) = E(z_2^2)$$

при $t \rightarrow \infty$ сходятся к стационарным значениям:

$$m_1 = \frac{(2\varepsilon^2 - g\delta)\sigma_2^2}{4\varepsilon(\varepsilon^2 - g\delta)},$$

$$m_2 = -\frac{g\sigma_2^2}{4(\varepsilon^2 - g\delta)},$$

$$m_3 = \frac{g^2\sigma_2^2}{4\varepsilon(\varepsilon^2 - g\delta)}.$$

Отметим, что параметр g характеризует здесь степень ненормальности. При малых g матрица A рассматриваемой системы близка к нормальной, а с увеличением g степень ненормальности увеличивается. Соответствующим образом изменяются и вторые моменты. Действительно, при $g = 0$ вторые моменты будут равны:

$$m_1 = \frac{\sigma_2^2}{2\varepsilon}, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 0.$$

Это означает, что в системе (2.25) чувствительной к шуму является координата x . При увеличении g начинают резко расти m_2 и m_3 .

Рассмотрим зависимость вторых моментов от параметров системы при g , близких к $g^* = \frac{\varepsilon}{\delta^2}$. Для этого запишем их в виде

$$m_1 = \frac{(2 - g/g^*)\sigma_2^2}{4\varepsilon(1 - g/g^*)}, \quad m_2 = -\frac{g\sigma_2^2}{4\varepsilon^2(1 - g/g^*)},$$

$$m_3 = \frac{g^2\sigma_2^2}{4\varepsilon^3(1 - g/g^*)}.$$

В случае $g \rightarrow g^*$ величины $m_i \rightarrow \infty$. Здесь, как следует из полученных соотношений, максимальный рост будет у m_3 .

При фиксированном отношении g/g^* справедлива асимптотика

$$m_1 \sim \frac{1}{\varepsilon}, \quad m_2 \sim \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad m_3 \sim \frac{1}{\varepsilon^3}.$$

Как видим, уменьшение ε увеличивает ненормальность матрицы A , что, в свою очередь, ведет к значительному росту стохастической чувствительности системы (2.25) и особенно ее координаты y .

Устойчивость к мультипликативным шумам

В отсутствие аддитивного шума ($\sigma_2 = 0$) анализ ЭСК-устойчивости равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ системы (2.25) в субкритическом случае по теореме 1.5 сводится к проверке неравенства

$$\text{tr}(QM) < 1. \quad (2.28)$$

Здесь M является матрицей установившихся значений вторых моментов решений системы

$$\dot{z} = Az + \sigma_1 g \dot{w}_1, \quad (2.29)$$

полученной из системы

$$\dot{z} = Az + \sigma_1 G z \dot{w}_1 \quad (2.30)$$

заменой мультипликативного шума на соответствующий аддитивный.

В рассматриваемом случае

$$\text{tr}(QM) = m_3 = \frac{g^2 \sigma_1^2}{4\varepsilon(\varepsilon^2 - g\delta)}.$$

Из (2.28) следует неравенство

$$g^2 \sigma_1 < 4\varepsilon(\varepsilon^2 - g\delta).$$

Критическим значением интенсивности мультипликативного шума является

$$\sigma_1^* = \frac{2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon^2 - g\delta)}}{g}. \quad (2.31)$$

При $\sigma_1 < \sigma_1^*$ равновесие $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ системы (2.25) – ЭСК-устойчиво. Если $\sigma_1 > \sigma_1^*$, то при любой интенсивности аддитивного шума $\sigma_2 > 0$ вторые моменты системы (2.26) будут

стремиться к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что случайные траектории нелинейной системы (2.25) покидают бассейн притяжения нулевого равновесия $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$.

Неравенство (2.28) можно записать иначе:

$$g < g_1^* = \frac{2\varepsilon^2}{\delta \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2}{\delta^2}} + 1 \right)}.$$

Здесь g_1^* является новым критическим значением параметра g , отмечающим точку уже стохастической бифуркации. Точка покоя $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ при переходе параметра g через g_1^* теряет ЭСК-устойчивость. Величина g_1^* связана с введенной выше g^* соотношением

$$g_1^* = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2}{\delta^2}} + 1} g^*.$$

Как видим, мультипликативный шум сдвигает точку бифуркации влево: $g_1^* < g^*$. Чем больше интенсивность мультипликативного шума σ_1 , тем больше величина этого сдвига.

Численный анализ

Линейная система первого приближения позволяет судить о динамике исходной нелинейной системы лишь в некоторой окрестности точки покоя $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$. Стохастическая неустойчивость $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ применительно к линейной системе означает экспоненциальный и неограниченный рост вторых моментов. Очевидно, в нелинейной системе такого стремления вторых моментов к бесконечности может и не быть. Благодаря сильной нелинейности, вторые моменты в исходной динамической модели являются ограниченными. Это может быть показано прямым численным моделированием случайных траекторий.

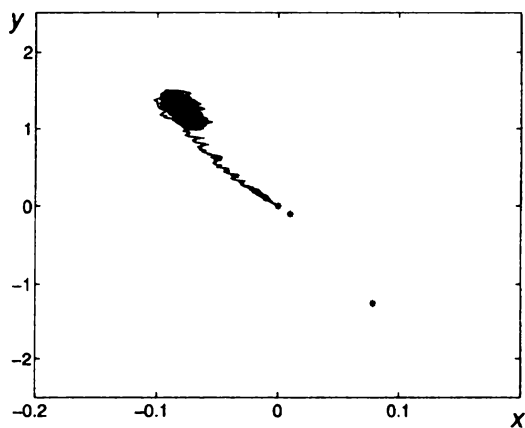


Рис. 2.10. Переход стохастической траектории из нулевого равновесия в окрестность ненулевого равновесия при $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.01$, $g = 0.99$, $\sigma_1 = 6.3 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_2 = 3 \cdot 10^{-4}$

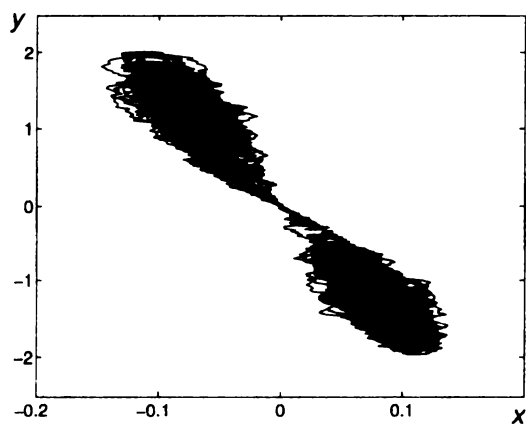


Рис. 2.11. Движение стохастической траектории вокруг всех стационарных точек при $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.01$, $g = 0.99$, $\sigma_1 = 1.4 \cdot 10^{-2}$, $\sigma_2 = 3 \cdot 10^{-4}$

Для динамической системы (2.25) в субкритической зоне были проведены соответствующие численные эксперименты. Для $\varepsilon = 0.1, \delta = 0.01$ критическим значением параметра g является $g^* = 1$. В интересующей нас субкритической зоне $g < g^* = 1$ было выбрано фиксированное значение $g = 0.99$. Соответствующим критическим значением для мультипликативного шума (см. (2.31)) здесь является значение $\sigma_1^* = 0.00639$.

В зависимости от значений параметра σ_1 в поведении случайных траекторий системы (2.25) были обнаружены три качественно различных режима. Для очень малых σ_1 случайные траектории, выходящие из точки покоя $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$, незначительно отклоняясь, концентрировались вблизи этой же точки.

При увеличении σ_1 траектории (см. рис. 2.10) покидают бассейн притяжения нулевой точки покоя и располагаются в окрестности ненулевого устойчивого равновесия. Дальнейшее увеличение σ_1 приводит к более сложной динамике, когда стохастические траектории (см. рис. 2.11) движутся вокруг всех стационарных точек детерминированной системы.

Представленные здесь результаты опубликованы в [183].

2.3. Стохастическая чувствительность циклов

Рассмотрим случай, когда инвариантным многообразием \mathcal{M} системы (1.1) является предельный цикл. Такой цикл может быть задан некоторым T -периодическим решением $x = \xi(t)$, где $x_0 = \xi(0)$ – фиксированная точка цикла. Решение $\xi(t)$ на интервале $[0, T)$ задает естественную параметризацию точек цикла:

$$\mathcal{M} = \{\xi(t) \mid 0 \leq t < T\}.$$

Предполагается, что цикл \mathcal{M} является Э-устойчивым. В этом случае вокруг цикла формируется стационарно распределенный пучок случайных траекторий системы (2.1). При этом

анализ стохастической чувствительности многообразия \mathcal{M} в соответствии с общей теорией (см. раздел 2.1) для системы (2.1) сводится к построению и исследованию T -периодического решения $W(t)$ матричного уравнения

$$\dot{V} = F(t)V + VF^\top(t) + P(t)S(t)P(t) \quad (2.32)$$

с T -периодическими коэффициентами

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^\top(t),$$

$$G(t) = \sigma(\xi(t)), \quad P(t) = P_{f(\xi(t))}.$$

Матрица $W(t)$ – функция стохастической чувствительности цикла \mathcal{M} – является по теореме 2.1 единственным решением уравнения (2.32) в пространстве Σ симметрических $n \times n$ -матриц, определенных и достаточно гладких на \mathbb{R}^1 с условиями периодичности

$$\forall t \in \mathbb{R}^1 \quad V(t+T) = V(t) \quad (2.33)$$

и вырожденности

$$\forall t \in \mathbb{R}^1 \quad V(t)r(t) = 0, \quad r(t) = f(\xi(t)). \quad (2.34)$$

Матрица $W(t)$ имеет здесь следующую вероятностную интерпретацию.

Рассмотрим стохастическую систему

$$dy = F(t)ydt + P(t)G(t)dw(t). \quad (2.35)$$

Данная система (см. теорему 2.1) имеет некоторый периодический режим, связанный с решением $\bar{y}(t)$. Ковариационной матрицей периодического случайного процесса $\bar{y}(t)$ и является искомое решение $W(t)$ системы (2.32)–(2.34).

Случайные траектории нелинейной системы (2.1) формируют вокруг цикла пучок, лежащий в некоторой инвариантной для системы (2.1) окрестности U . Пусть Π_t – гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Через U_t обозначим окрестность точки $\xi(t)$, лежащую в Π_t : $U_t = U \cap \Pi_t$. Предполагается, что $U_t \cap U_s = \emptyset$ при $t \neq s$.

Вероятностное описание случайных траекторий в пучке удобно связать со следующей векторной функцией X_t . Значения X_t есть точки пересечения случайных траекторий нелинейной системы (2.1) с U_t . Вероятностное распределение траекторий в пучке с течением времени стабилизируется, поэтому случайная переменная X_t в окрестности U_t имеет некоторое стационарное распределение с плотностью $\rho_t(x, \varepsilon)$.

Для малых шумов функция $\rho_t(x, \varepsilon)$ вблизи цикла имеет экспоненциальную гауссовскую асимптотику $\rho_t^*(x, \varepsilon)$:

$$\rho_t(x, \varepsilon) \approx \rho_t^*(x, \varepsilon) = K \exp \left(- \frac{(x - \xi(t))^T W^+(t) (x - \xi(t))}{2\varepsilon^2} \right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$, задаваемой функцией стохастической чувствительности $W(t)$.

Это распределение, сосредоточенное в гиперплоскости Π_t , является сингулярным $\text{rank} D(t, \varepsilon) \leq n - 1$. Для невырожденных шумов ($\det \sigma(x)|_M \neq 0$) имеем $\text{rank} D(t, \varepsilon) = n - 1$. Ковариационная матрица $D(t, \varepsilon)$ характеризует разброс точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью Π_t .

Рассмотрим собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ и собственные векторы v_1, v_2, \dots, v_n матрицы $W(t)$. В силу вырожденности $W(t)$ собственное значение $\lambda_n = 0$. Остальные собственные значения и соответствующие им собственные векторы характеризуют разброс пучка в гиперплоскости Π_t по величине и направлению.

2.3.1. Итерационный метод

Решение $W(t)$ задачи Коши для матричного уравнения Ляпунова (2.32) с начальным условием $W(0) = W_0$ можно записать в виде

$$W(t) = Z(t) \left[W_0 + \int_0^t Z(-\tau) P(\tau) S(\tau) P(\tau) Z^\top(-\tau) d\tau \right] Z^\top(t),$$

где $Z(t)$ – фундаментальная матрица решений системы

$$dz = F(t)zdt. \quad (2.36)$$

Последовательные значения $W_m = W(mT)$ этого решения связаны рекуррентной формулой

$$W_{m+1} = \mathcal{T}[W_m] + Q.$$

Здесь оператор \mathcal{T} и матрица Q имеют вид

$$\mathcal{T}[W] = Z(T)WZ^\top(T),$$

$$Q = \int_0^T Z(T-\tau)P(\tau)S(\tau)P(\tau)Z^\top(T-\tau)d\tau = \hat{W}(T),$$

где $\hat{W}(t)$ – решение уравнения (2.32) с условием $\hat{W}(0) = 0$.

Условие (2.33) приводит к задаче отыскания матрицы \bar{W} , являющейся решением уравнения

$$W = \mathcal{T}[W] + Q. \quad (2.37)$$

Для системы (2.36) матрица монодромии $B = Z(T)$ имеет собственный вектор $r = f(\xi(0))$ с собственным значением $\lambda_1 = 1$: $Br = r$.

Остальные точки $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ спектра $\sigma(B)$ в силу P -устойчивости (2.36) лежат внутри единичного круга [35]:

$$q = \max_{2 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1.$$

У оператора \mathcal{T} все собственные значения имеют вид

$$\lambda_{i,j}(\mathcal{T}) = \lambda_i \lambda_j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Отметим, что $\lambda_{1,1} = \lambda_1^2 = 1$ отвечает собственному вектору rr^\top . При этом остальная часть спектра \mathcal{T} принадлежит кругу $|\lambda| \leq q^2$.

Спектральный радиус $\rho(\mathcal{T})$ оператора \mathcal{T} равен единице, поэтому система (2.37) является вырожденной. Наряду с решением \bar{W} она имеет бесконечное множество решений вида $W = \bar{W} + Crr^\top$, где C – любое число.

Условие (2.34) выделяет из всех решений (2.37) единственное – матрицу $\bar{W} \in \Sigma$. Здесь для \bar{W} может быть получена невырожденная система

$$W = \mathcal{T}_P[W] + PQP \quad (2.38)$$

с оператором $\mathcal{T}_P[W] = PBWB^\top P$, где $P = P(0)$.

Используя разложение Шура [41], легко доказать, что

$$\sigma(PB) = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

и, следовательно, $\rho(\mathcal{T}_P) = q^2 < 1$.

Всякое решение $W \in \Sigma$ уравнения (2.37) является решением уравнения (2.38). Неравенство $\rho(\mathcal{T}_P) < 1$, гарантируя существование и единственность решения \bar{W} уравнения (2.38), обеспечивает сходимость итерационного процесса

$$W_{m+1} = \mathcal{T}_P(W_m) + PQP, \quad W_0 = 0. \quad (2.39)$$

При этом

$$\bar{W} = \lim_{m \rightarrow \infty} W_m = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_P^k [PQP] = \sum_{k=0}^{\infty} B_1^k Q_1 (B_1^\top)^k, \quad (2.40)$$

$$B_1 = PB, \quad Q_1 = PQP.$$

Ряд в (2.40) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q^2 < 1$.

Искомое решение $W(t)$ системы (2.32)–(2.34) может быть найдено по формуле

$$W(t) = Z(t)\bar{W}Z^\top(t) + \hat{W}(t). \quad (2.41)$$

В результате для построения решения $W(t)$ системы (2.32) – (2.34) может быть предложен [16] следующий алгоритм:

1. Найти на интервале $[0, T]$ матрицу $\hat{W}(t)$ – решение уравнения (2.32) с начальным условием $\hat{W}(0) = 0$.

2. Найти на $[0, T]$ $Z(t)$ – фундаментальную матрицу решений системы (2.36).

3. Подсчитав $r = f(\xi(0))$, $P = I - rr^\top / r^\top r$, $Q_1 = P\hat{W}(T)P$, $B_1 = PZ(T)$, найти с требуемой точностью матрицу \bar{W} – сумму ряда (2.40).

4. Используя данные, полученные в 1, 2, 3, найти решение $W(t)$ по формуле (2.41).

Замечание 2.1. Эффективность данного итерационного алгоритма зависит от скорости сходимости ряда (2.40). Если цикл M хорошо устойчив (q мало), то ряд (2.40) сходится быстро. Для слабо устойчивого цикла (q близко к единице), когда ряд сходится медленно, можно привлечь прямые методы [41], использующие ортогональные преобразования.

Замечание 2.2. Представленный здесь итерационный метод (2.39) можно трактовать как некоторый метод установления для отыскания решения $W(t)$ системы (2.32) – (2.34). Дей-

ствительно, рассмотрим последовательность матричных функций $W_m(t)$, определенных на $[0, T]$ следующим образом: каждая функция $W_m(t)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) есть решение уравнения (2.32) с начальным условием $W_m(0) = PW_{m-1}(T)P$, при этом $W_0(0) = 0$.

Функции $W_0(t), W_1(t), \dots$ можно рассматривать как последовательные звенья единого решения системы (2.32), определенного на $[0, +\infty)$ и имеющего разрывы, задаваемые оператором проектирования, в моменты времени, кратные периоду T . Последовательность функций $W_m(t)$ связана с последовательностью матриц W_m из (2.39) соотношениями $W_m(0) = W_m$. Сходимость последовательности W_m к \bar{W} означает сходимость функций $W_m(t)$ к периодическому решению $W(t)$, при этом $W(0) = W(T) = \bar{W}$.

2.3.2. Чувствительность $2D$ -циклов

В случае системы (2.1) на плоскости ($n = 2$) матрица $W(t)$, задающая стохастическую чувствительность цикла, и проекционная матрица $P(t)$ имеют ранг, равный единице, и представимы в виде [14]

$$W(t) = \mu(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^\top(t).$$

Здесь $p(t)$ – нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\xi(t))$, а следовательно, и циклу M в точке $\xi(t)$, а $\mu(t) > 0$ – T -периодическая скалярная функция, задающая разброс (дисперсию) пучка по нормали $p(t)$ к циклу.

Подставив в дифференциальное уравнение (2.32) матрицу $W(t) = \mu(t)P(t)$ и умножив его на $p^\top(t)$ слева и на $p(t)$ справа, с учетом свойств проекционной матрицы

$$p^\top(t)P(t)p(t) \equiv 1, \quad p^\top(t)\dot{P}(t)p(t) \equiv 0,$$

получим для $\mu(t)$ краевую задачу

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t), \quad \mu(0) = \mu(T) \quad (2.42)$$

с T -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^\top(t)(F^\top(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^\top(t)S(t)p(t).$$

Укажем ряд важных свойств этой задачи.

Утверждение 2.1. Пусть

$$\forall t \in \mathbb{R}^1 \quad b(t) \geq 0, \quad \int_0^T b(t)dt > 0. \quad (2.43)$$

Для того чтобы краевая задача (2.42) имела единственное решение $\mu(t) > 0$ на $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы для коэффициента $a(t)$ выполнялось неравенство

$$\int_0^T a(t)dt < 0. \quad (2.44)$$

Доказательство. Достаточность. Общее решение дифференциального уравнения из (2.42) имеет вид

$$\mu(t) = g(t)(c + h(t)),$$

где

$$g(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), \quad h(t) = \int_0^t \frac{b(s)}{g(s)}ds,$$

c – произвольная постоянная.

Отметим, что в условиях (2.43) справедливы неравенства $h(t) \geq 0$, $h(T) > 0$. Требование $\mu(0) = \mu(T)$ приводит к уравнению

$$(1 - g(T))c = g(T)h(T).$$

Это уравнение в условиях (2.44) имеет решение

$$c = \frac{g(T)h(T)}{1 - g(T)} > 0.$$

Функция $\mu(t)$ при данном c строго положительна и является единственным решением краевой задачи (2.42).

Необходимость. Пусть $\mu(t) > 0$ – решение (2.42). Тогда

$$a(t) \equiv \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} - \frac{b(t)}{\mu(t)}.$$

Поскольку

$$\int_0^T \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} dt = \ln \mu(T) - \ln \mu(0) = 0,$$

то

$$\int_0^T a(t) dt = - \int_0^T \frac{b(t)}{\mu(t)} dt. \quad (2.45)$$

Из этого соотношения и условий (2.43) сразу следует неравенство (2.44). Утверждение 2.1 доказано.

Рассмотрим условия (2.43). Функция $b(t)$ связана с параметрами случайных возмущений системы (2.1) соотношением

$$b(t) = p^\top(t) \sigma(\xi(t)) \sigma^\top(\xi(t)) p(t).$$

Неравенство $b(t) \geq 0$ выполняется при любых шумах.

Условие $\int_0^T b(t) dt > 0$ означает, что на некотором интервале выполняется неравенство

$$\sigma^\top(\xi(t)) p(t) \neq 0. \quad (2.46)$$

Условие (2.46) имеет простой геометрический смысл. Оно означает, что в некоторой точке цикла хотя бы один столбец матрицы $\sigma(x)$ имеет ненулевую проекцию на нормаль.

Утверждение 2.2. При $n = 2$ ненулевой характеристический показатель λ детерминированной системы (2.36) имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{2T} \int_0^T a(t) dt. \quad (2.47)$$

Доказательство. Известно [35], что при $n = 2$ характеристический показатель задается формулой

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr} F(t) dt.$$

Для подынтегральной функции справедливы равенства

$$\begin{aligned} \text{tr} F(t) &= \frac{1}{2} \text{tr}(F(t) + F^\top(t)) = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[(F(t) + F^\top(t)) \left(p(t)p^\top(t) + \frac{r(t)r^\top(t)}{r^\top(t)r(t)} \right) \right] = \\ &= a(t) + \frac{\delta(t)}{2r^\top(t)r(t)}, \end{aligned}$$

где

$$\delta(t) = (F(t)r(t))^\top r(t) + r^\top(t)F(t)r(t).$$

Поскольку $\dot{r}(t) = F(t)r(t)$, то

$$\delta(t) = \dot{r}^\top(t)r(t) + r^\top(t)\dot{r}(t) = \frac{d}{dt} (r^\top(t)r(t))$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\delta(t)}{r^\top(t)r(t)} dt &= \int_0^T \frac{\frac{d}{dt}(r^\top(t)r(t))}{r^\top(t)r(t)} dt = \\ &= \ln(r^\top(T)r(T)) - \ln(r^\top(0)r(0)) = 0, \end{aligned}$$

откуда сразу следует формула (2.47). Утверждение 2.2 доказано.

Следствие. Неравенство (2.44) является необходимым и достаточным условием Э-устойчивости цикла M (P -устойчивости системы (2.36)). Таким образом, для Э-устойчивого цикла неравенство (2.46) гарантирует существование и единственность невырожденной функции стохастической чувствительности – решения $\mu(t) > 0$ краевой задачи (2.42).

В анализе влияния случайных возмущений на стохастическую динамику системы около предельного цикла важную роль играет величина

$$M = \max_{[0, T]} \mu(t).$$

Величину M будем называть *коэффициентом чувствительности цикла M* к случайным возмущениям. В то время как функция $\mu(t)$ дает детальное описание стохастической чувствительности вдоль цикла, коэффициент M является удобной характеристикой цикла в целом.

2.3.3. Стохастический осциллятор Ван-дер-Поля

Рассмотрим стохастический осциллятор Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \delta x_2(1 - x_1^2) + \varepsilon \dot{w}, \end{cases}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, а ε – интенсивность случайной помехи.

При значении параметра $\delta > 0$ детерминированное уравнение Ван-дер-Поля ($\varepsilon = 0$) имеет предельный цикл. Степень его устойчивости выражается характеристическим показателем λ . На рис. 2.14,а представлена зависимость показателя λ от параметра δ . Как видим, с ростом δ показатель λ убывает – цикл становится все более устойчивым.

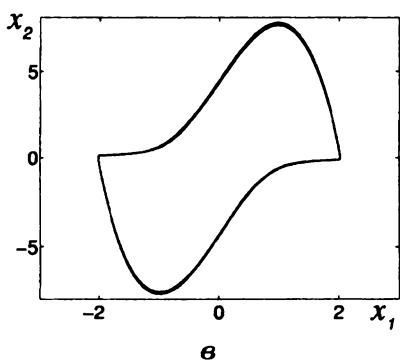
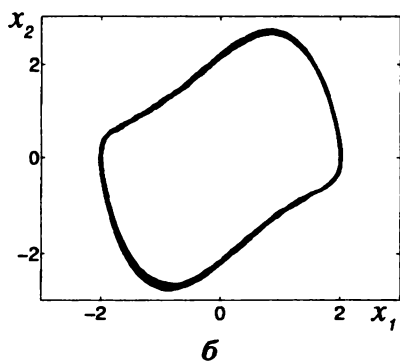
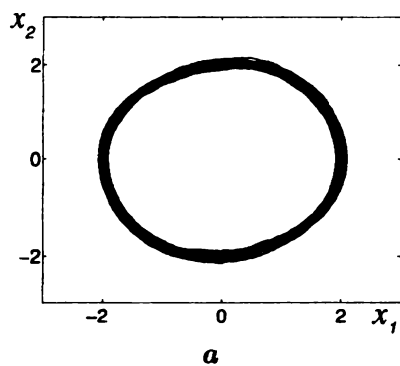


Рис. 2.12. Случайные траектории осциллятора Ван-дер-Поля:
 $a - \delta = 0.1$; $б - \delta = 1$; $в - \delta = 5$

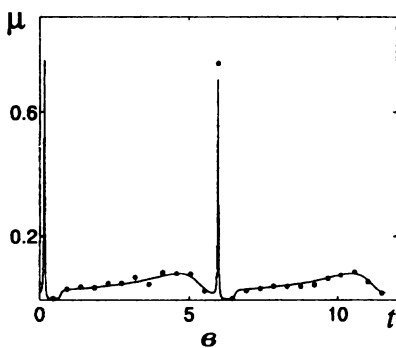
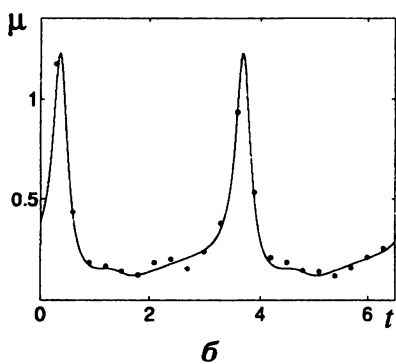
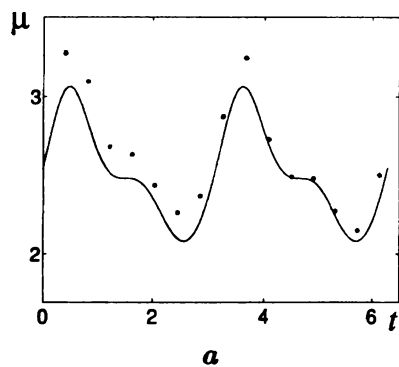


Рис. 2.13. Функция стохастической чувствительности для осциллятора Ван-дер-Поля:

$a - \delta = 0.1$; $b - \delta = 1$; $v - \delta = 5$

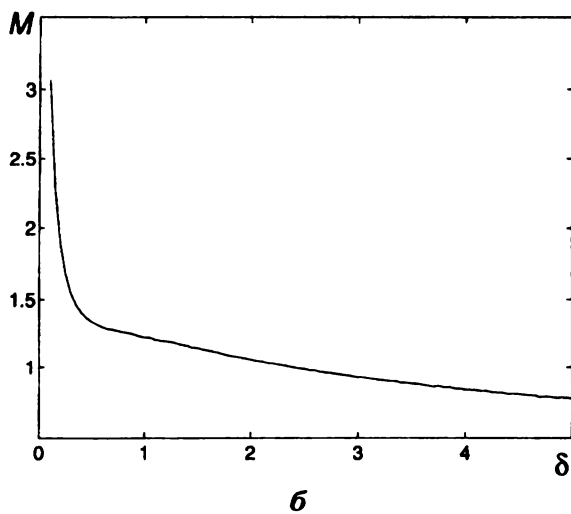
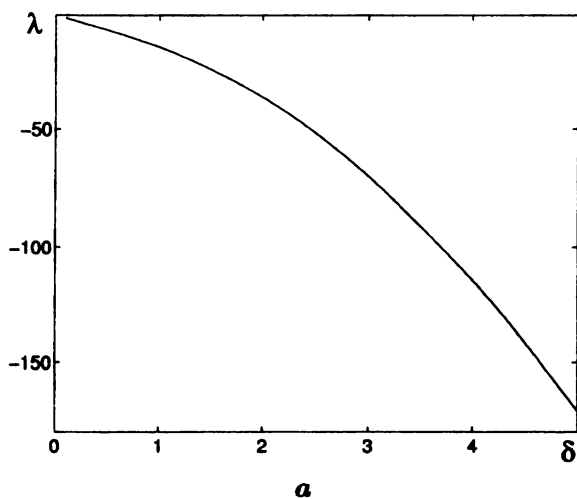


Рис. 2.14. Уравнение Ван-дер-Поля:
 a – характеристический показатель $\lambda(\delta)$;
 b – коэффициент стохастической чувствительности

$$M(\delta) = \max_{[0, T]} \mu(\delta, t)$$

Под действием случайных возмущений ($\varepsilon \neq 0$) траектория покидает детерминированный цикл и формирует вокруг него некоторый пучок.

На рис. 2.12 для различных δ представлены графики случайных траекторий стохастического осциллятора Ван-дер-Поля. Случайные траектории получены прямым численным моделированием системы по методу Рунге – Кутты четвертого порядка с соответствующей стохастической добавкой (интенсивность шума $\varepsilon = 0.05$, шаг метода $h = 0.0001$). Как видим, разброс случайных траекторий вокруг цикла с ростом δ уменьшается. При этом ширина пучка вдоль цикла заметно меняется. Это означает, что стохастическая чувствительность отдельных участков цикла может существенно различаться. Функция стохастической чувствительности $\mu(t)$ позволяет получить детальное описание этих явлений.

На рис. 2.13 представлены графики $\mu(t)$ на интервалах периодичности. Если при малом δ мы наблюдаем лишь незначительные колебания значений стохастической чувствительности $\mu(t)$, то при $\delta = 1$ и особенно при $\delta = 5$ график $\mu(t)$ имеет острые пики и существенные перепады значений.

На рис. 2.13 наряду с графиками $\mu(t)$ (сплошная линия) изображены значения (звездочки) эмпирической функции чувствительности $\tilde{\mu}(t)$. Здесь $\tilde{\mu}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} D(t, \varepsilon)$, где $D(t, \varepsilon)$ – эмпирическая дисперсия точек пересечения случайных траекторий с прямой, ортогональной циклу в точке $\xi(t)$.

Значения $\tilde{\mu}$ были вычислены для 100 оборотов случайной траектории вокруг цикла с шумом интенсивности $\varepsilon = 0.1$. Как видим, теоретическая кривая $\mu(t)$, полученная с помощью линейной системы первого приближения, хорошо соответствует значениям $\tilde{\mu}(t)$ эмпирической функции чувствительности исходной нелинейной системы и описывает ее основные черты (острые пики, интервалы монотонности).

На рис. 2.14 представлена зависимость характеристического показателя

$$\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr} F(t) dt$$

и коэффициента стохастической чувствительности

$$M = \max_{[0, T]} \mu(t)$$

от параметра δ . С ростом δ запас устойчивости цикла увеличивается, стохастическая чувствительность цикла монотонно убывает.

2.3.4. Брюсселятор с возмущениями: неравномерная чувствительность и хаос

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a - (b+1)x_1 + x_1^2 x_2 + \varepsilon \theta \\ \dot{x}_2 = b x_1 - x_1^2 x_2, \end{cases} \quad (2.48)$$

полученную добавлением малых возмущений $\varepsilon \theta(t)$ в классическую модель – брюсселятор [97].

Для невозмущенной системы (2.48) ($\varepsilon = 0$) значение параметра $\bar{b} = 1 + a^2$ является точкой бифуркации. При переходе параметра b через \bar{b} положение равновесия $\bar{x}_1 = a$, $\bar{x}_2 = \frac{b}{a}$ теряет устойчивость, и у системы появляется устойчивый предельный цикл. На рис. 2.15 изображен фазовый портрет возмущенного брюсселятора при $a = 0.4$, $b = 1.2$ ($\bar{b} = 1.16$).

Рассмотрим, как изменяется динамика брюсселятора при добавлении периодических и стохастических внешних возмущений [144]. Хорошо известно [265, 266], что периодически возмущаемый брюсселятор может перейти в хаотический режим.

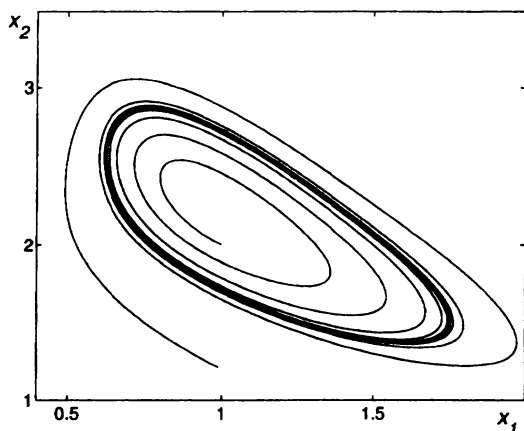


Рис. 2.15. Фазовый портрет невозмущенного брюсселятора при $a = 0.4$, $b = 1.2$

Так, например, невозмущенный предельный цикл для параметров $a = 0.4$, $b = 1.2$ при добавлении внешнего периодического воздействия $\theta(t) = \cos \omega t$ демонстрирует последовательность бифуркаций удвоения периода с переходом к хаосу (см. рис. 2.16).

Сравним реакцию брюсселятора на периодические возмущения с откликом на стохастические помехи. Пусть в (2.48) $\theta(t) = \dot{w}(t)$, где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Случайные траектории стохастически возмущенного брюсселятора покидают замкнутую кривую детерминированного цикла и формируют некоторый пучок вокруг него.

На рис. 2.17 изображены случайные траектории системы (2.48) при $a = 0.4$, $b = 1.2$, полученные численным моделированием, для трех значений интенсивности шума: $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-2}$. Значение $\varepsilon = 10^{-2}$ близко к точке стохастической бифуркации, при которой возмущения разрушают предельный цикл.

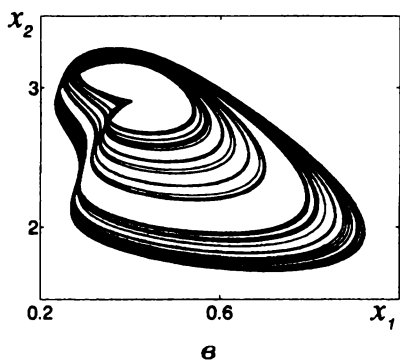
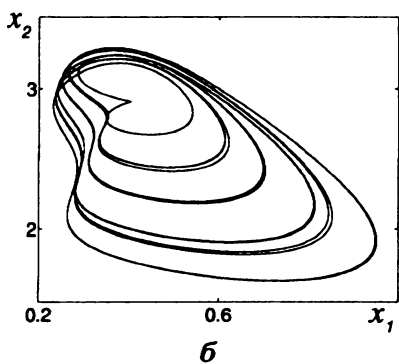
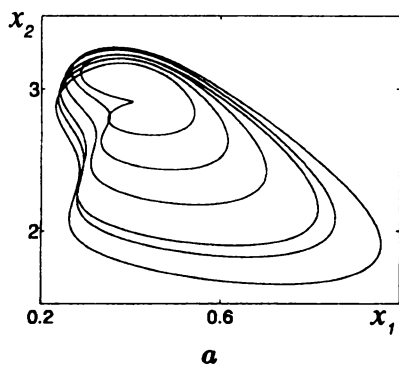


Рис. 2.16. Брюсселятор с периодическими возмущениями при
 $a = 0.4$, $b = 1.2$, $\varepsilon = 0.05$:
 $a - \omega = 0.8015$; $б - \omega = 0.803$; $в - \omega = 0.81$ (хаос)

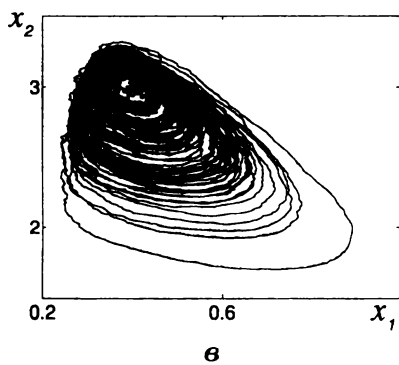
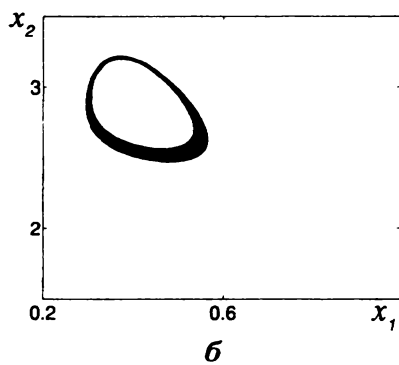
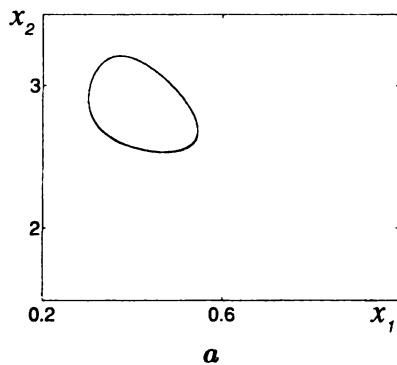


Рис. 2.17. Брюсселятор со случайными возмущениями при

$$a = 0.4, b = 1.2:$$

$$a - \varepsilon = 0.0001; б - \varepsilon = 0.001; в - \varepsilon = 0.01$$

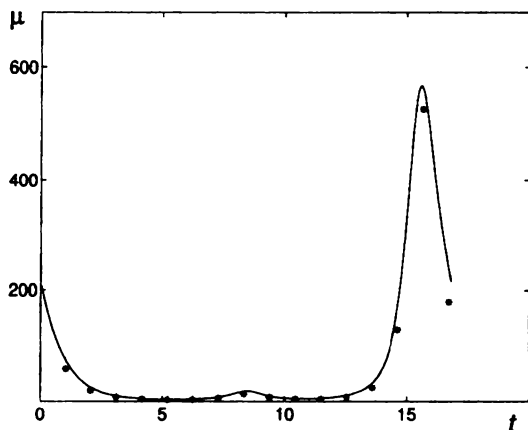


Рис. 2.18. Функция стохастической чувствительности для брюсселятора при $a = 0.4$, $b = 1.2$

Стохастическая бифуркация, связанная с разрушением предельного цикла, привлекала внимание многих исследователей [134, 153, 187, 225, 226, 227, 239].

На рис. 2.18 представлен график функции стохастической чувствительности $\mu(t)$ вместе со значениями (звездочки) функции эмпирической чувствительности $\tilde{\mu}(t)$.

Здесь $\tilde{\mu}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} D(t, \varepsilon)$, где $D(t, \varepsilon)$ – эмпирическая дисперсия точек пересечения случайных траекторий с прямой, ортогональной невозмущенному циклу в точке $\xi(t)$. Значения $\tilde{\mu}$ были получены для 100 оборотов вокруг цикла при помехе $\varepsilon = 10^{-3}$.

Как и в рассмотренном выше примере осциллятора Ван-дер-Поля, можно отметить хорошее совпадение теоретической кривой $\mu(t)$ с экспериментальными данными $\tilde{\mu}$.

Существенный перепад значений $\mu(t)$ на интервале периодичности отражает неравномерность разброса случайных траекторий (см. рис. 2.17,б).

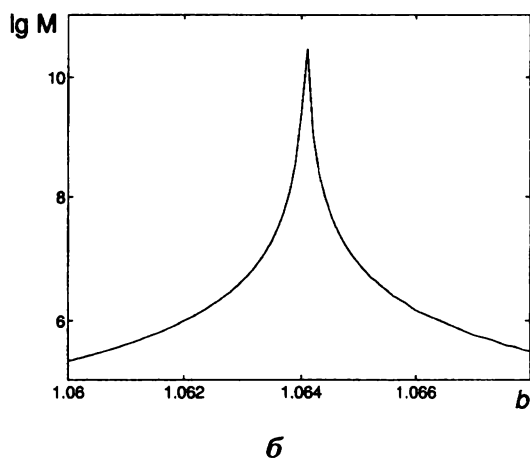
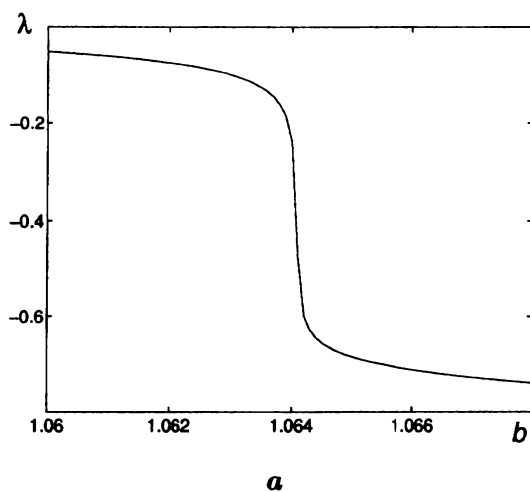


Рис. 2.19. Характеристический показатель (а) и коэффициент стохастической чувствительности (б) для брюсселятора с $a = 0.2$.

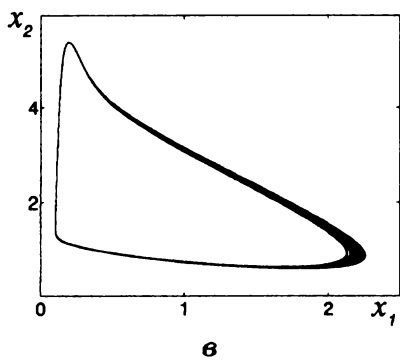
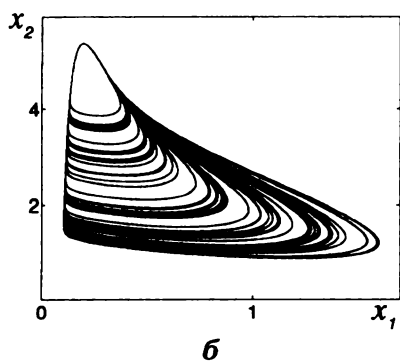
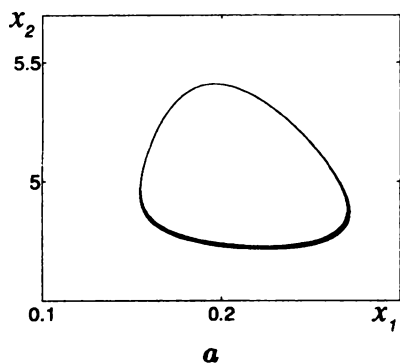


Рис. 2.20. Брюсселятор со случайными возмущениями при
 $a = 0.2$, $\varepsilon = 10^{-5}$;
 $a - b = 1.06$; $b - b_* = 1.064082$; $\sigma - b = 1.065$

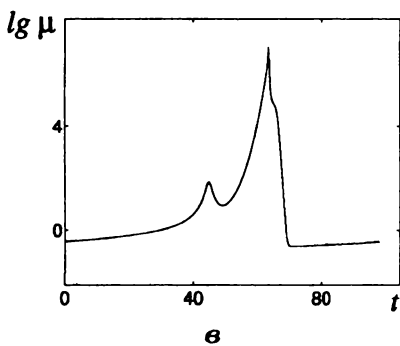
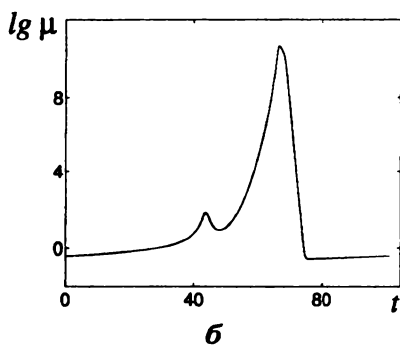
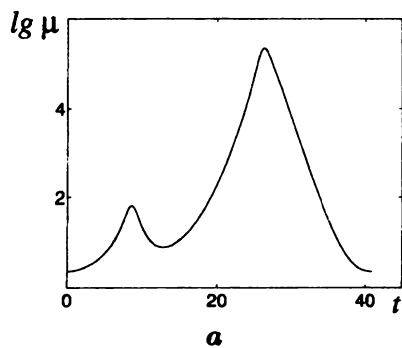


Рис. 2.21. Функция стохастической чувствительности для
брюсселятора при $a = 0.2$:

$a - b = 1.06$; $б - b_* = 1.064082$; $в - b = 1.065$

Самая широкая часть пучка расположена в нижней части цикла. В остальной части пучка случайные траектории проходят гораздо ближе к идеальной детерминированной траектории невозмущенного цикла.

Достаточно большое значение коэффициента чувствительности $M = 568$ означает, что брюсселятор существенно усиливает как периодические, так и стохастические внешние воздействия, что может привести к хаосу (см. рис. 2.16,в; 2.17,в).

Исследования брюсселятора, проведенные в широком диапазоне параметров, позволили обнаружить следующую интересную зону сверхвысокой чувствительности.

Рассмотрим поведение брюсселятора для фиксированного $a = 0.2$ и различных значений параметра $b > \bar{b} = 1.04$ из интервала $[1.06, 1.07]$.

Сначала исследуем реакцию системы (2.48) на стохастические возмущения: $\theta(t) = \dot{w}$.

Зависимость характеристического показателя λ и коэффициента чувствительности M от параметра b показана на рис. 2.19.

Как видно на рис. 2.19,а, показатель λ с ростом b монотонно убывает, что означает увеличение степени устойчивости цикла к возмущению начальных данных.

Казалось бы, это должно сопровождаться соответствующим снижением чувствительности цикла и к случайным возмущениям. Именно такая картина и наблюдалась в стохастической модели Ван-дер-Поля (см. рис. 2.14). Однако здесь для стохастического брюсселятора наблюдается обратное. Величина M ведет себя совсем иначе (см. рис. 2.19,б). Здесь мы наблюдаем типичный пример «sensitive dependence to noise without sensitive dependence to initial conditions» [172].

На рассматриваемом интервале функция $M(b)$ резко возрастает, график ее имеет острый высокий пик и лишь затем

начинает убывать. При этом перепад значений $M(b)$ достигает нескольких порядков. Критическим значением параметра b здесь является

$$b_* = \operatorname{argmax}_b M(b) = 1.064082, \quad M(b_*) = 4.4 \cdot 10^{10}.$$

Сравним пучки случайных траекторий и графики функции чувствительности стохастического брюсселятора при значениях параметра b , близких к b_* . На рис. 2.20 для трех значений параметра $b_1 = 1.06$, $b_2 = b_* = 1.064082$, $b_3 = 1.065$ изображены пучки случайных траекторий, найденные прямым численным моделированием брюсселятора, возбуждаемого малой случайной помехой интенсивности $\varepsilon = 10^{-5}$.

На рис. 2.21 представлены графики соответствующих функций чувствительности. Как видно, брюсселятор при $b = b_*$ становится сверхчувствительным. Для очень малых (по сути, фоновых) возмущений наблюдается резкий рост амплитуды отклонений траекторий от цикла.

Функция стохастической чувствительности (см. рис. 2.21) хорошо отражает эту особенность. Отметим, что нижняя часть цикла наиболее чувствительна.

Пусть теперь возмущения в (2.48) являются периодически: $\theta(t) = \cos(\omega t)$ с $\omega = 0.5$. Для таких периодических возмущений значение $b_* = 1.064082$ также является критическим. Действительно, увеличение интенсивности периодического воздействия ε приводит систему (2.48) к последовательным бифуркациям удвоения периода: 1-цикл ($\varepsilon = 0.0005$) \rightarrow 2-цикл ($\varepsilon = 0.0007$) \rightarrow 4-цикл ($\varepsilon = 0.000763$) и т. д. Серия бифуркаций представлена на рис. 2.22.

При $\varepsilon = 0.00085$ пучок траекторий (см. рис. 2.22,з) выглядит как хаотический. Беспорядочно разбросанные точки сечения Пуанкаре на рис. 2.23 подтверждают это.

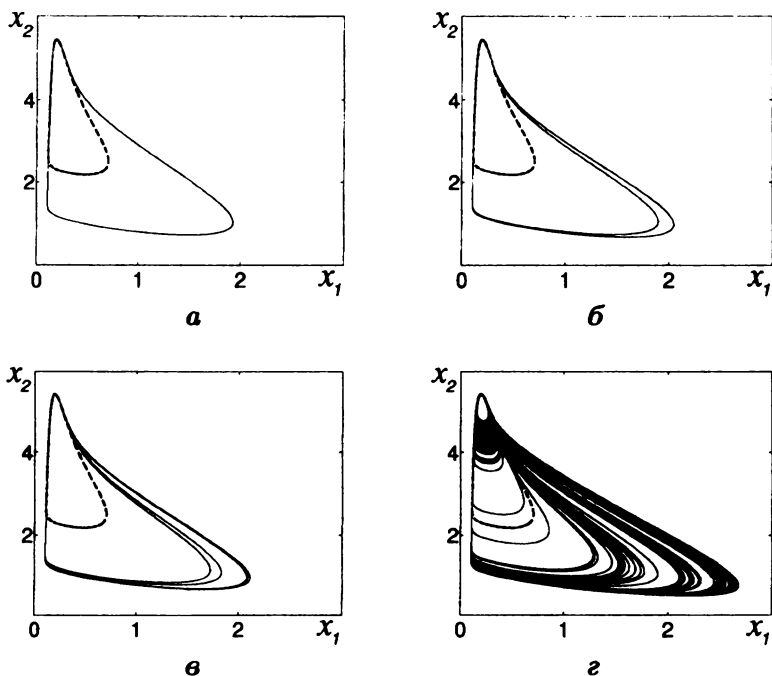


Рис. 2.22. Бифуркации и переход к хаосу в периодически возбужденном бруселяторе при $a = 0.2$, $b_* = 1.064082$:
 $a - \varepsilon = 0.0005$; б - $\varepsilon = 0.0007$; в - $\varepsilon = 0.000763$; г - $\varepsilon = 0.00085$ (хаос)

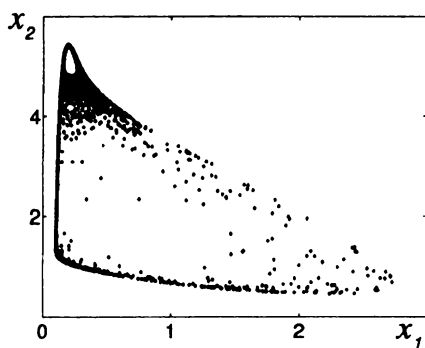


Рис. 2.23. Сечения Пуанкаре для периодически возбужденного бруселятора при $b_* = 1.064082$, $\varepsilon = 0.00085$

Для критического значения параметра $b_* = 1.064082$ броселятор является генератором хаоса.

Здесь важно подчеркнуть следующую геометрическую деталь. Верхняя часть аттракторов как для периодических режимов, так и для хаотических является более устойчивой и практически совпадает с идеальной траекторией невозмущенного цикла. Появляющаяся хаотическая структура связана с нижней частью цикла. Заметим, что острый пик функции стохастической чувствительности (см. рис. 2.21) соответствует нижней части цикла.

Таким образом, функция стохастической чувствительности является полезным аналитическим инструментом для предсказания особенностей в поведении нелинейных систем как со стохастическими, так и с периодическими возмущениями.

2.3.5. Чувствительность 3D-циклов

Рассмотрим динамику системы (2.1) в трехмерном случае. Здесь при исследовании разброса случайных траекторий вокруг цикла можно использовать следующее наглядное геометрическое описание.

На рис. 2.24 изображены точки пересечения (звездочки) случайных траекторий с секущей плоскостью Π_t , ортогональной циклу в точке $\xi(t)$. Ковариация распределения этих точек, задаваемая матрицей $W(t)$ – функцией стохастической чувствительности цикла, – является единственным решением системы (2.32)–(2.34).

В изучаемом здесь трехмерном случае ($n = 3$) для построения решения $V(t)$ уравнения (2.32) ($V(t)$ – симметрическая неотрицательно определенная 3×3 -матрица) будем использовать следующее сингулярное разложение:

$$V(t) = \lambda_1(t)v_1(t)v_1^\top(t) + \lambda_2(t)v_2(t)v_2^\top(t) + \lambda_3(t)v_3(t)v_3^\top(t).$$

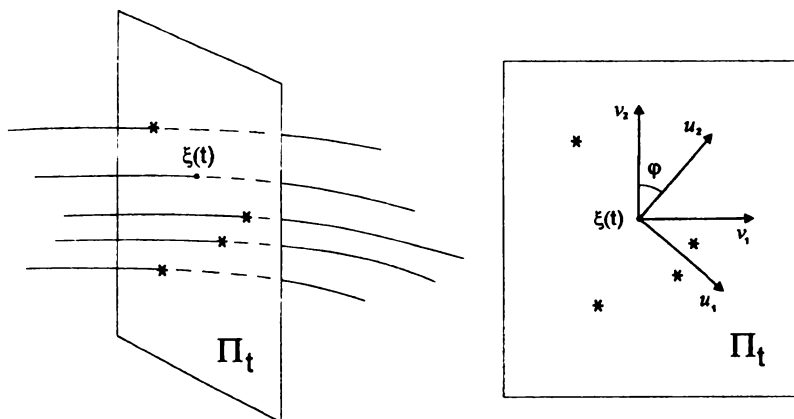


Рис. 2.24. Точки пересечения (звездочки) случайных траекторий с гиперплоскостью Π_t , ортогональной циклу в точке $\xi(t)$

Здесь $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \lambda_3(t)$ – собственные значения, а $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ – собственные векторы матрицы $V(t)$.

Из условия (2.34) следует, что при любом t матрица $V(t)$ является вырожденной (распределение точек пересечения сосредоточено в плоскости Π_t). Это означает, что $\lambda_3(t) \equiv 0$ и соответствующий собственный вектор $v_3(t) = r(t)/\|r(t)\|$ является касательным к циклу. Вследствие этого разложение матрицы $V(t)$ имеет вид

$$V(t) = \lambda_1(t)v_1(t)v_1^\top(t) + \lambda_2(t)v_2(t)v_2^\top(t). \quad (2.49)$$

Здесь $V(t)$ задается скалярными функциями $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и векторами $v_1(t), v_2(t)$. В случае невырожденных шумов функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ строго положительны и определяют при любом t дисперсию случайных траекторий цикла вдоль векторов $v_1(t), v_2(t)$. Значения $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ задают размер, а $v_1(t), v_2(t)$ задают направление осей эллипса рассеивания точек пересечения случайных траекторий с плоскостью Π_t . Уравнение этого эллипса

в плоскости Π_t имеет вид

$$(x - \xi(t))^T W^+(t)(x - \xi(t)) = 2k^2,$$

где k задает доверительную вероятность $P = 1 - e^{-k}$.

Обозначим через $u_1(t)$, $u_2(t)$ некоторый ортонормированный базис плоскости Π_t . Этот базис может быть легко найден по известному T -периодическому решению $\xi(t)$ (см. ниже замечание 2.3). Собственные векторы $v_1(t)$, $v_2(t)$ могут быть получены вращением базиса $u_1(t)$, $u_2(t)$ на некоторый угол $\varphi(t)$ (см. рис. 2.24):

$$\begin{aligned} v_1(t) &= u_1(t) \cos \varphi(t) + u_2(t) \sin \varphi(t), \\ v_2(t) &= -u_1(t) \sin \varphi(t) + u_2(t) \cos \varphi(t). \end{aligned} \quad (2.50)$$

В результате разложение (2.49), (2.50) позволяет выразить неизвестное решение системы (2.32)–(2.34) через три скалярные функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$.

Обозначим

$$P_1(t) = v_1(t) \cdot v_1^T(t), \quad P_2(t) = v_2(t) \cdot v_2^T(t).$$

Отметим, что $P_i(t)$ ($i = 1, 2$) являются проекционными матрицами:

$$P_i v_i = v_i, \quad P_i v_j = 0 \quad (i \neq j), \quad P = P_1 + P_2. \quad (2.51)$$

Перепишем разложение (2.49) в виде

$$V(t) = \lambda_1(t) \cdot P_1(t) + \lambda_2(t) \cdot P_2(t).$$

Лемма 2.3. Для ортонормированных векторных функций $v_i(t)$ и проекционных матриц $P_i(t) = v_i(t)v_i^T(t)$, ($i = 1, 2$) справедливы следующие тождества:

$$v_1^T(t) \dot{P}_1(t) v_1(t) \equiv 0, \quad (2.52)$$

$$v_1^\top(t) \dot{P}_2(t) v_1(t) \equiv 0, \quad (2.53)$$

$$v_2^\top(t) \dot{P}_1(t) v_2(t) \equiv 0, \quad (2.54)$$

$$v_2^\top(t) \dot{P}_2(t) v_2(t) \equiv 0, \quad (2.55)$$

$$v_1^\top(t) \dot{P}_1(t) v_2(t) = \dot{\varphi}(t) + \dot{u}_1^\top(t) u_2(t), \quad (2.56)$$

$$v_1^\top(t) \dot{P}_2(t) v_2(t) = -\dot{\varphi}(t) - \dot{u}_1^\top(t) u_2(t). \quad (2.57)$$

Доказательство. Тождество (2.52) непосредственно следует из соотношений

$$\begin{aligned} v_1^\top \dot{P}_1 v_1 &= v_1^\top [\dot{v}_1 v_1^\top] v_1 = \\ &= v_1^\top [\dot{v}_1 v_1^\top + v_1 \dot{v}_1^\top] v_1 = v_1^\top \dot{v}_1 + \dot{v}_1^\top v_1 = [\dot{v}_1^\top v_1] \equiv 0. \end{aligned}$$

Тождество (2.55) доказывается аналогично. Тождество (2.53) следует из

$$v_1^\top \dot{P}_2 v_1 = v_1^\top [\dot{v}_2 v_2^\top + v_2 \dot{v}_2^\top] v_1 = v_1^\top \dot{v}_2 v_2^\top v_1 + v_1^\top v_2 \dot{v}_2^\top v_1 \equiv 0.$$

Тождество (2.54) доказывается аналогично. Используя равенства

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \dot{u}_1 \cos \varphi + \dot{u}_2 \sin \varphi + v_2 \dot{\varphi}, \\ \dot{u}_1^\top u_1 &\equiv 0, \quad \dot{u}_2^\top u_2 \equiv 0, \quad u_1^\top \dot{u}_2 = -\dot{u}_1^\top u_2, \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} v_1^\top \dot{P}_1 v_2 &= v_1^\top [\dot{v}_1 v_1^\top + v_1 \dot{v}_1^\top] v_2 = \dot{v}_1^\top v_2 = \\ &= (\dot{u}_1^\top \cos \varphi + \dot{u}_2^\top \sin \varphi + v_2^\top \dot{\varphi}) v_2 = \\ &= (\dot{u}_1^\top \cos \varphi + \dot{u}_2^\top \sin \varphi) v_2 + \dot{\varphi} = -\dot{u}_1^\top u_1 \cos \varphi \sin \varphi + \\ &+ \dot{u}_1^\top u_2 \cos^2 \varphi - \dot{u}_2^\top u_1 \sin^2 \varphi + \dot{u}_2^\top u_2 \sin \varphi \cos \varphi + \dot{\varphi} = \dot{\varphi} + \dot{u}_1^\top u_2. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует (2.56). Тождество (2.57) доказывается аналогично.

Теорема 2.2. Матрица $V(t)$ является решением системы (2.32), (2.34) тогда и только тогда, когда скалярные функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$ разложения (2.49), (2.50) удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \lambda_1 v_1^\top [F + F^\top] v_1 + v_1^\top S v_1 \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_2 v_2^\top [F + F^\top] v_2 + v_2^\top S v_2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \dot{\varphi} &= \lambda_2 v_1^\top F v_2 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_2 + \\ &\quad + v_1^\top S v_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \dot{u}_1^\top u_2.\end{aligned}\tag{2.58}$$

Доказательство. Пусть матрица $V(t)$ является решением (2.32), (2.34). Подставляя разложение

$$V = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$$

в дифференциальное уравнение (2.32), мы получаем

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\lambda}_1 P_1 + \lambda_1 \dot{P}_1 + \dot{\lambda}_2 P_2 + \lambda_2 \dot{P}_2 = \\ &= \lambda_1 F P_1 + \lambda_2 F P_2 + \lambda_1 P_1 F^\top + \lambda_2 P_2 F^\top + (P_1 + P_2) S (P_1 + P_2).\end{aligned}$$

Умножая это соотношение слева на v_i^\top и справа на v_j и используя свойства проекционных матриц (2.51) и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}v_1^\top \dot{V} v_1 &= \dot{\lambda}_1 = \lambda_1 v_1^\top F v_1 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_1 + v_1^\top S v_1 \\ v_2^\top \dot{V} v_2 &= \dot{\lambda}_2 = \lambda_2 v_2^\top F v_2 + \lambda_2 v_2^\top F^\top v_2 + v_2^\top S v_2 \\ v_1^\top \dot{V} v_2 &= \lambda_1 (\dot{\varphi} + \dot{u}_1^\top u_2) + \lambda_2 (-\dot{\varphi} - \dot{u}_1^\top u_2) = \\ &= \lambda_2 v_1^\top F v_2 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_2 + v_1^\top S v_2.\end{aligned}\tag{2.59}$$

Таким образом, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют системе (2.58).

Докажем теперь обратное. Пусть $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$ являются решениями системы (2.58). Рассмотрим матрицу $V = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$. Эта матрица V удовлетворяет условию (2.34). Благодаря (2.59), следующие тождества для $i, j = 1, 2$ выполняются:

$$v_i^\top (\dot{V} - \mathcal{L}(V)) v_j \equiv 0.\tag{2.60}$$

Здесь $\mathcal{L}(V) = FV + VF^\top + PSP$. После дифференцирования тождества $r^\top V r \equiv 0$ получаем

$$[r^\top \dot{V} r] = \dot{r}^\top V r + r^\top \dot{V} r + r^\top V \dot{r} = r^\top \dot{V} r \equiv 0,$$

$$r^\top (\dot{V} - \mathcal{L}(V)) r \equiv 0.$$

Следовательно, (2.60) также выполняется и для $i, j = 3$. Из (2.60) следует, что матрица V является решением уравнения (2.32). Теорема 2.2 доказана.

Как видим, построение решения системы (2.32), (2.34) на основе сингулярного разложения (2.49), (2.50) сводится к решению системы (2.58) для трех скалярных функций. Матрица $W(t)$ (искомая функция стохастической чувствительности цикла) решения системы (2.32)–(2.34) может быть получена из $V(t)$ с помощью следующего предельного перехода.

Теорема 2.3. Пусть матрица $W(t)$ является решением системы (2.32)–(2.34). Пусть $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \varphi(t)$ есть произвольное решение системы (2.58) на интервале $[0, +\infty)$, а матрица

$$V(t) = \lambda_1(t) \cdot P_1(t) + \lambda_2(t) \cdot P_2(t),$$

где $P_i(t) = v_i(t)v_i^\top(t)$ с векторными функциями $v_i(t)$ из (2.50). Тогда матрица $V(t)$ сходится к матрице $W(t)$ при $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (V(t) - W(t)) = 0. \quad (2.61)$$

Доказательство. По теореме 2.2 матрица $V(t)$ является решением системы (2.32), (2.34) и поэтому $V(t) = P(t)V(t)P(t)$. Теперь сходимость (2.61) следует из утверждения б) теоремы 2.1.

Замечание 2.3. Для вычисления правых частей системы (2.58) необходимо знать векторные функции $u_1(t), u_2(t)$ и производную $\dot{u}_1(t)$.

Предлагается следующий метод их расчета. Перепишем исходную детерминированную систему (1.1) и ее T -периодическое решение $x = \xi(t)$ покоординатно:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3),$$

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))^T.$$

Касательный вектор $r(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))^T$ к циклу в точке $\xi(t)$ имеет координаты $f_i(t) = f_i(\xi(t))$, $i = 1, 2, 3$. Ортонормированный базис $u_1(t), u_2(t)$ векторов плоскости Π_t может быть выбран в форме

$$u_1 = g_1 \cdot \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = g_2 \cdot \begin{pmatrix} -f_1 f_3 \\ -f_2 f_3 \\ f_1^2 + f_2^2 \end{pmatrix},$$

где

$$g_1 = (f_1^2 + f_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad g_2 = \left(f_3^2 (f_1^2 + f_2^2) + (f_1^2 + f_2^2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

В результате такого выбора производная \dot{u}_1 может быть найдена по формуле

$$\dot{u}_1 = \dot{g}_1 \cdot \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 = & -(f_1^2 + f_2^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(f_1 \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} f_3 \right) + \right. \\ & \left. + f_2 \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} f_3 \right) \right). \end{aligned}$$

Геометрический метод описания стохастических трехмерных циклов с помощью доверительных торov разработан в [146, 252].

2.3.6. Стохастическая модель Ресслера

Рассмотрим стохастическую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z + \varepsilon \dot{w}_1 \\ \dot{y} &= x + \alpha y + \varepsilon \dot{w}_2 \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu) + \varepsilon \dot{w}_3,\end{aligned}\quad \alpha = 0.2$$

полученную добавлением аддитивных случайных возмущений в классическую модель Ресслера [245]. Здесь $w_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) – независимые стандартные винеровские процессы.

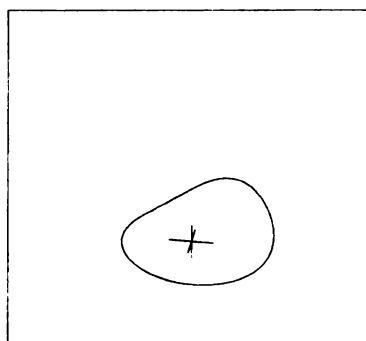
При переходе параметра μ через бифуркационное значение $\bar{\mu} = 2\alpha = 0.4$ у детерминированной системы Ресслера ($\varepsilon = 0$) появляется устойчивый предельный цикл, задаваемый T -периодическим решением $\xi(t)$.

При дальнейшем увеличении параметра μ в системе Ресслера происходят бифуркации удвоения периода с переходом к хаосу. Здесь можно выделить зоны структурной устойчивости – интервалы $I_1, I_2, \dots, I_{2^k}, \dots$, на которых существуют предельные циклы $M_1, M_2, \dots, M_{2^k}, \dots$. Здесь M_{2^k} есть устойчивый предельный цикл кратности 2^k (2^k -цикл).

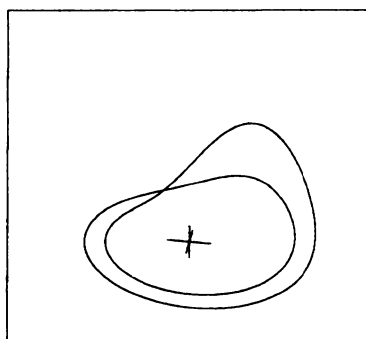
При $\alpha = 0.2$ имеем: $I_1 = (0.4; 2.830)$, $I_2 = (2.830; 3.836)$, $I_4 = (3.836; 4.123)$, $I_8 = (4.123; 4.186)$ и т. д.

На рис. 2.25 изображены предельные циклы системы Ресслера для $\mu = 2$ (1-цикл), $\mu = 3$ (2-цикл), $\mu = 4$ (4-цикл).

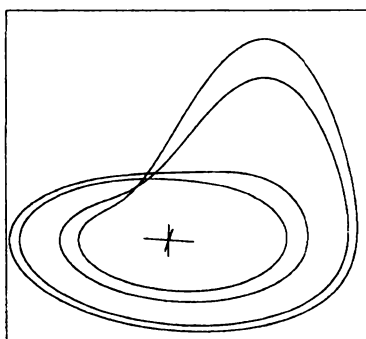
В результате действия случайных возмущений траектории системы сходят с детерминированного цикла и формируют вокруг него некоторый пучок.



a

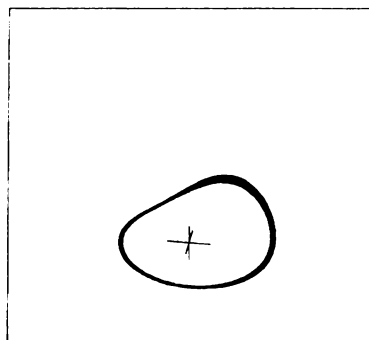


б

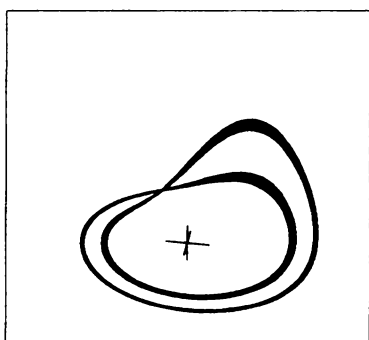


в

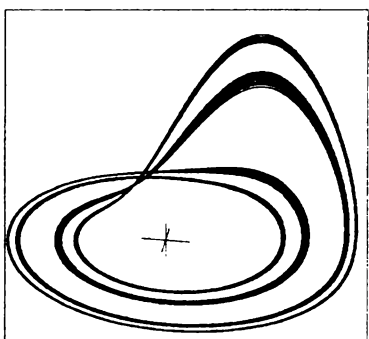
Рис. 2.25. Детерминированные циклы системы Ресслера:
 $a - \mu = 2$ (1-цикл); $б - \mu = 3$ (2-цикл); $в - \mu = 4$ (4-цикл)



a



б



в

Рис. 2.26. Случайные траектории системы Ресслера при $\varepsilon = 0.005$:

a – $\mu = 2$; *б* – $\mu = 3$; *в* – $\mu = 4$

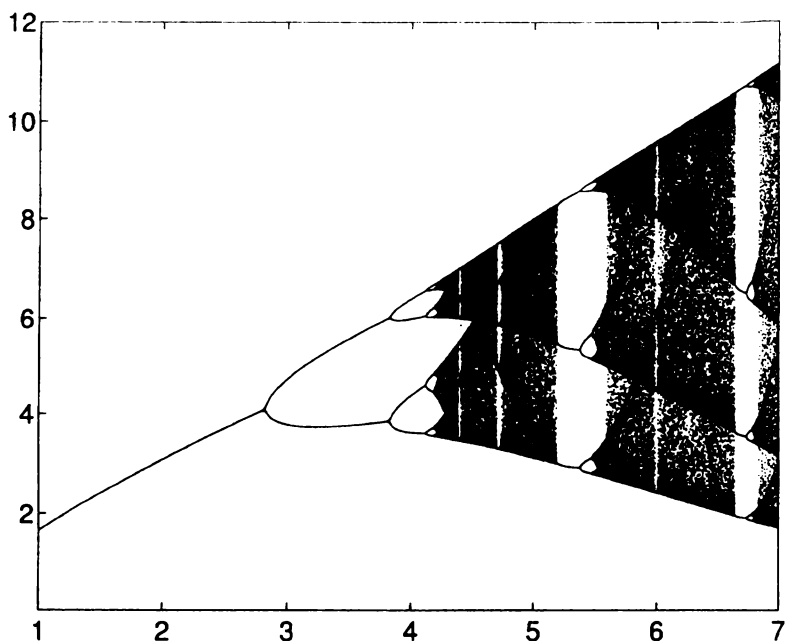


Рис. 2.27. Бифуркационная диаграмма детерминированной модели Ресслера при $\alpha = 0.2$

На рис. 2.26 изображены пучки случайных траекторий, полученные прямым численным моделированием (метод Рунге – Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0.001$) стохастической системы Ресслера, возбуждаемой случайной помехой интенсивности $\varepsilon = 0.005$.

Общая картина бифуркаций невозмущенной модели хорошо прослеживается при помощи бифуркационной диаграммы. На рис. 2.27 для каждого $\mu \in [1; 7]$ представлены точки пересечения аттрактора системы Ресслера с полуплоскостью $x < 0$, $y = 0$.

Оценить влияние случайных помех при различных значениях параметра можно при помощи стохастической бифуркационной диаграммы (см. рис. 2.28).

Под воздействием случайных возмущений детерминированная бифуркационная диаграмма «размывается», при этом пропадают все тонкие детали бифуркационной структуры, а остаются лишь первые наиболее грубые.

На диаграмме (рис. 2.28) хорошо видно, что разброс линий вызванный случайными возмущениями, весьма неоднороден

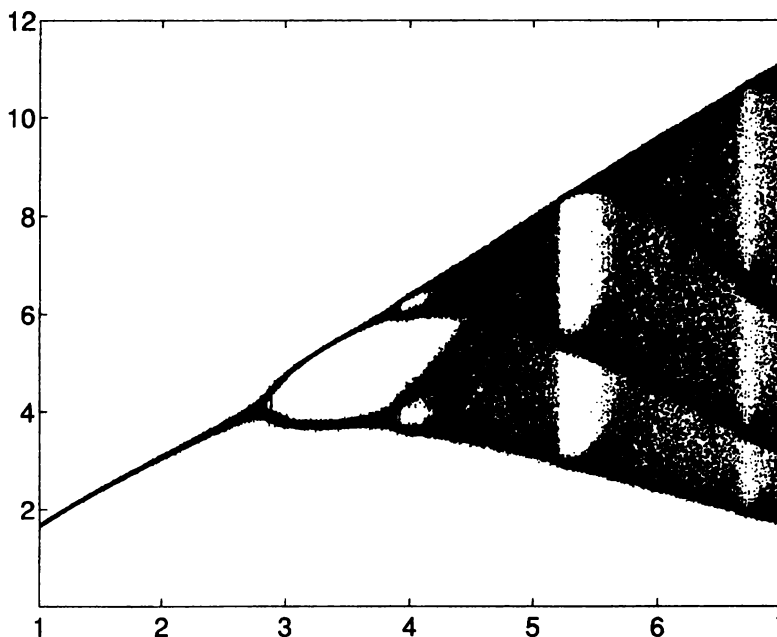


Рис. 2.28. Бифуркационная диаграмма стохастической модели Ресслера при $\alpha = 0.2$, $\varepsilon = 0.005$

Для детального анализа [17] этого разброса воспользуемся функцией стохастической чувствительности.

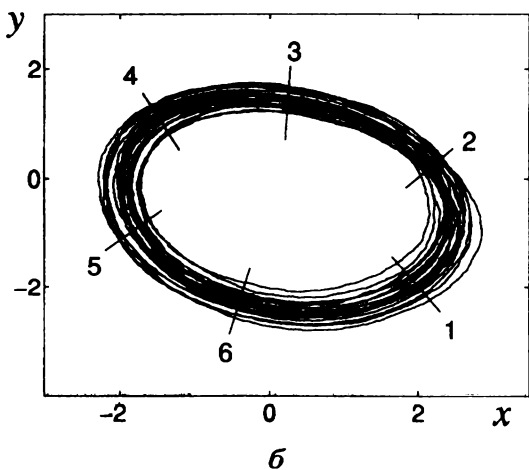
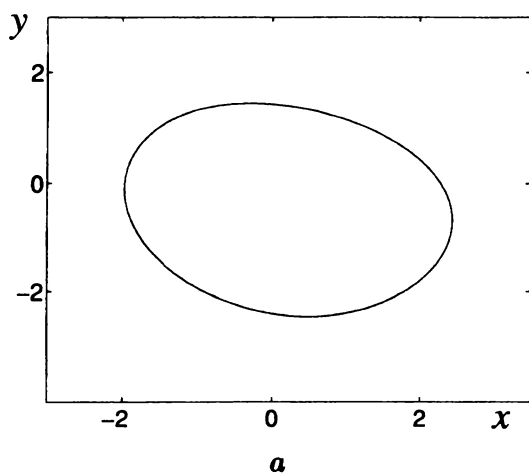


Рис. 2.29. Проекция детерминированного цикла (а) и пучка случайных траекторий (б) модели Ресслера для $\alpha = 0.2$, $\mu = 1.2$, $\varepsilon = 0.04$

Рассмотрим стохастическую систему Ресслера с параметрами $\alpha = 0.2$, $\mu = 1.2$. Детерминированная система Ресслера ($\varepsilon = 0$) имеет устойчивый 1-цикл. Его проекция на плоскость $ХОУ$ представлена на рис. 2.29,а. На рис. 2.29,б изображена проекция пучка случайных траекторий для помех интенсивности $\varepsilon = 0.04$ и отмечено расположение гиперплоскостей, ортогональных детерминированному циклу.

В данной проекции разброс случайных траекторий вокруг цикла выглядит достаточно равномерным. Более детальный анализ точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостями демонстрирует иную картину. На рис. 2.30 показано, как меняется расположение точек пересечения (звездочки) при переходе от одной гиперплоскости к другой. Как видно из рис. 2.30, случайные траектории распределены вокруг цикла весьма неравномерно.

Разброс пучка случайных траекторий для помех интенсивности ε в сечениях Π_i будем характеризовать эмпирической ковариационной матрицей $\tilde{D}(t, \varepsilon)$.

Матрица $\tilde{W}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{D}(t, \varepsilon)$ играет роль эмпирической функции чувствительности цикла в точке $\xi(t)$. Ее положительные собственные значения $\tilde{\lambda}_1(t) > \tilde{\lambda}_2(t) > 0$ могут служить естественными скалярными характеристиками этой чувствительности.

На рис. 2.31 представлены значения (звездочки) $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$, вычисленные вдоль цикла при $\varepsilon = 10^{-4}$ по случайным траекториям, совершившим 100 оборотов вокруг цикла.

Проведем сравнение этих характеристик, полученных прямым численным моделированием, с результатами, опирающимися на теоретическую функцию чувствительности, задаваемую матрицей $W(t)$.

В общем случае построение этой матричной функции требует решения системы (2.32)–(2.34).

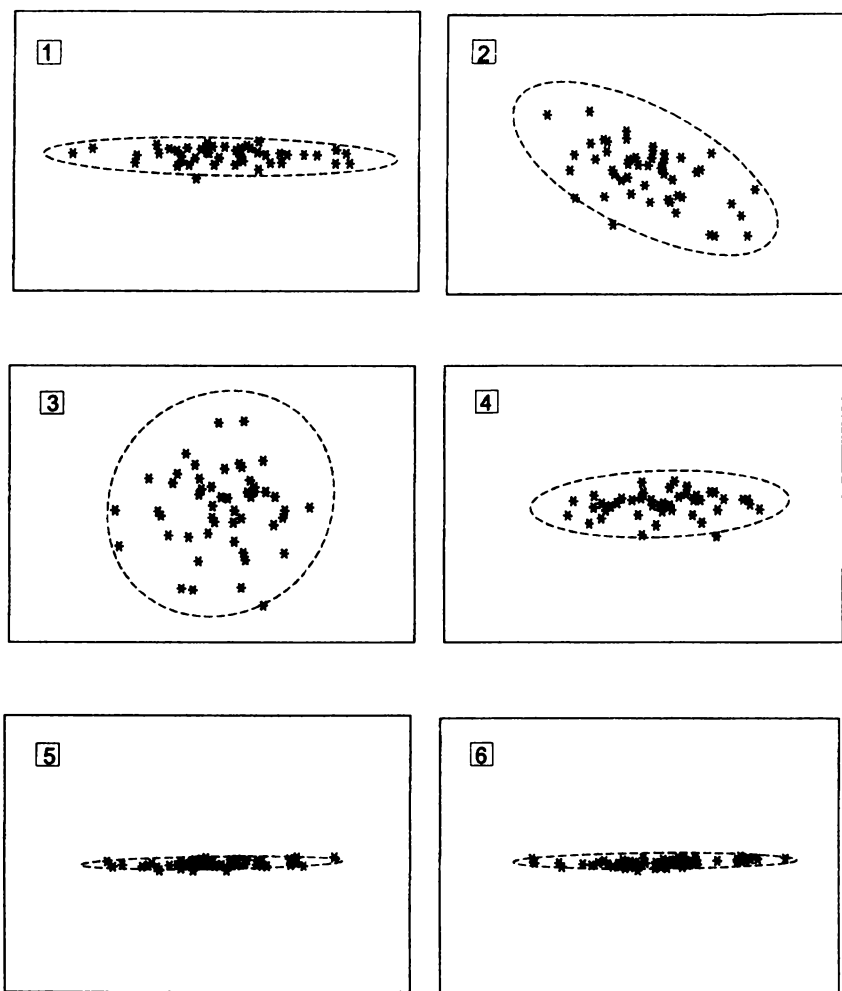
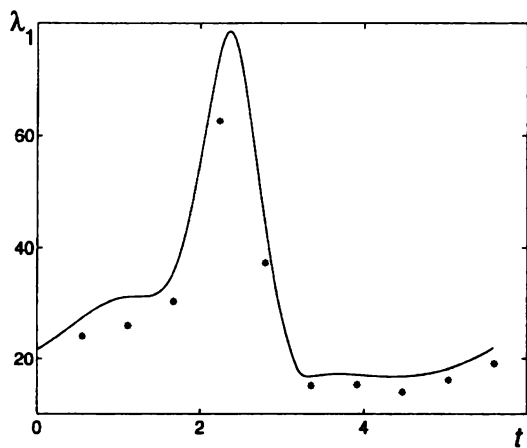
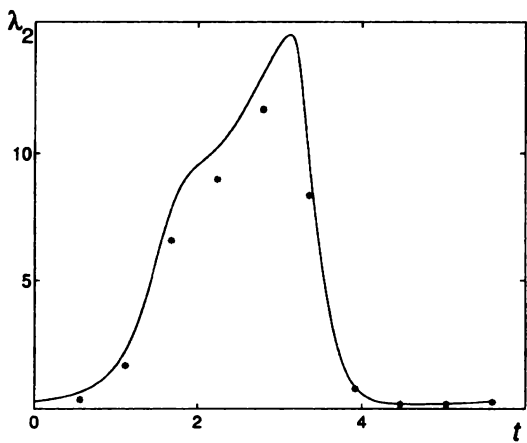


Рис. 2.30. Точки пересечения случайных траекторий с нормальными плоскостями и доверительные эллипсы



a



b

Рис. 2.31. Стохастическая чувствительность цикла для $\alpha = 0.2$,
 $\mu = 1.2$, $\varepsilon = 0.001$

Здесь, в трехмерном случае, сингулярное разложение (2.49), (2.50) позволяет выразить матрицу $W(t)$ через три скалярные функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$. Эти функции могут были найдены методом установления (см. теорему 2.3) решений системы (2.58).

Собственные значения $\lambda_1(t) > \lambda_2(t)$ матрицы $W(t)$ являются удобными скалярными характеристиками чувствительности цикла.

Графики функций $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ (сплошная линия) для стохастического цикла модели Ресслера представлены на рис. 2.31.

Как видно из рис. 2.31, теоретические кривые $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, проходя вблизи значений $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ эмпирической функции чувствительности, хорошо передают основные качественные детали в ее поведении: пологие участки и острые пики, интервалы монотонности, колебания и т. д. Таким образом, теоретическая функция чувствительности хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными в ходе прямого численного моделирования. Теоретическая функция чувствительности достаточно точно передает важные качественные особенности в поведении пучка: неравномерность ширины пучка вдоль цикла, значительный перепад величины разброса пучка по нормали к циклу.

Полученные в сингулярном разложении матрицы $W(t)$ значения $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$ позволяют построить в каждой ортогональной плоскости Π_t эллипс рассеивания случайных траекторий.

Значения $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ определяют размер и конфигурацию этого эллипса, а угол $\varphi(t)$ задает ориентацию осей эллипса в плоскости Π_t .

Как видно из рис. 2.30, построенные эллипсы достаточно точно отражают разброс точек пересечения. Для эллипсов, представленных на рис. 2.30, значение доверительной вероятности

равно 0.85. Старшее собственное значение $\lambda_1(t)$ матрицы $W(t)$ определяет разброс в направлении собственного вектора $v_1(t)$. Вектор $v_1(t)$ указывает направление, в котором величина разброса случайных траекторий будет максимальна. В этом направлении дисперсия будет равна $\varepsilon^2 \lambda_1(t)$.

Для описания стохастической чувствительности цикла в целом будем использовать коэффициент чувствительности

$$M = \max_{[0, T]} \lambda_1(t).$$

Величина M является функцией от μ . На рис. 2.32 представлен график $M(\mu)$ в зоне бифуркаций удвоения периода системы Ресслера.

При увеличении параметра μ на каждом интервале структурной устойчивости величина $M(\mu)$ сначала убывает, а потом возрастает. При прохождении точек бифуркации функция $M(\mu)$ стремится к бесконечности.

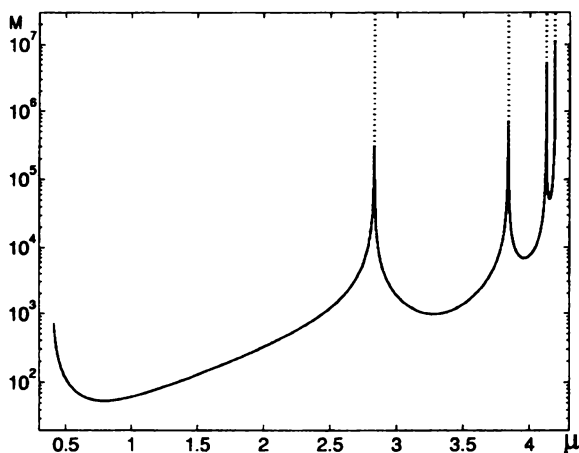


Рис. 2.32. Стохастическая чувствительность системы Ресслера при переходе к хаосу

Рассмотрим минимальные значения функции $M(\mu)$ на каждом интервале I_s ($s = 1, 2, \dots, 2^k, \dots$) структурной устойчивости:

$$M_s = \min_{\mu \in I_s} M(\mu), \quad \mu_s = \operatorname{argmin}_{\mu \in I_s} M(\mu).$$

Цикл M_s при параметре μ_s будем называть стохастическим s -суперциклом. Цикл M_s является наименее восприимчивым к случайным возмущениям среди всех s -циклов.

Последовательность M_{2^k} (см. рис. 2.32) растет как геометрическая прогрессия и стремится к бесконечности. Чем выше кратность цикла, тем он более чувствителен к случайным возмущениям. Известно, что в цепи бифуркаций удвоения периода при переходе от порядка к хаосу в системе наблюдается большое количество неустойчивых циклов.

Проведенный здесь анализ показывает, что при этом у существующих устойчивых циклов неограниченно возрастает стохастическая чувствительность. Рассмотрим величины

$$d_k = \frac{M_{2^{k+1}}}{M_{2^k}}.$$

Величина d_k представляет собой отношение степеней чувствительности соседних в цепи бифуркаций стохастических 2^{k+1} -суперцикла и 2^k -суперцикла. Для системы Ресслера получены значения $d_0 = 18.047$, $d_1 = 7.004$, $d_2 = 7.558$, $d_3 = 6.985$.

Как видим, в последовательных значениях d_k устанавливается некоторая закономерность: $d_1 \approx d_2 \approx d_3$. Это означает, что чувствительность стохастических суперциклов при удвоении периода увеличивается примерно в 7 раз. Отмеченная закономерность (рост чувствительности) близка к результатам, полученным в [59, 95, 167] для дискретных моделей.

2.3.7. Стохастическая модель Лоренца

Рассмотрим стохастическую систему

$$\dot{x} = \sigma(-x + y) + \varepsilon \dot{w}_1 \quad \sigma = 10, b = \frac{8}{3}$$

$$\dot{y} = rx - y - xz + \varepsilon \dot{w}_2$$

$$\dot{z} = -bz + xy + \varepsilon \dot{w}_3,$$

полученную добавлением малых аддитивных случайных возмущений в классическую модель Лоренца [228]. Здесь $w_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) – независимые стандартные винеровские процессы.

Система Лоренца демонстрирует большое разнообразие различных режимов поведения. Это позволяет использовать ее в качестве базовой модели для проверки новых методов нелинейного анализа.

Для невозмущенной системы Лоренца ($\varepsilon = 0$) хорошо известно [264], что интервал $99.524 < r < 100.795$ является зоной бифуркаций удвоения периода бесконечной цепочки предельных циклов. Этот r -интервал разбивается на интервалы структурной устойчивости $I_1, I_2, \dots, I_{2^k}, \dots$ с предельными циклами $M_1, M_2, \dots, M_{2^k}, \dots$. Здесь M_{2^k} является устойчивым циклом кратности 2^k (2^k -цикл). Для модели Лоренца $I_1 = (99.98, 100.795)$, $I_2 = (99.629, 99.98)$, $I_4 = (99.547, 99.629)$ и т. д.

Классический анализ детерминированной устойчивости предельных циклов предполагает рассмотрение динамики решений, отвечающих малым отклонениям от цикла в начальный момент времени. Имея некоторое начальное отклонение, детерминированная траектория с течением времени приближается к циклу. При этом стандартными характеристиками устойчивости являются мультипликаторы – собственные значения матрицы монодромии соответствующей линейной периодической системы первого приближения.

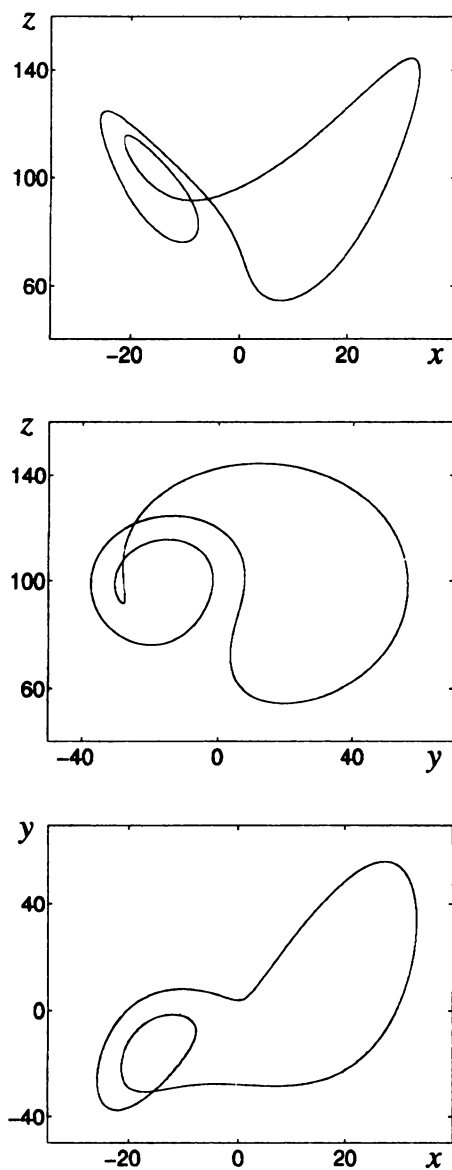


Рис. 2.33. Проекция цикла невозмущенной модели Лоренца для $r = 100.563$

Поскольку один из мультипликаторов, отвечающий за динамику возмущений вдоль цикла, всегда равен единице, то в рассматриваемом здесь трехмерном случае устойчивость цикла характеризуют два оставшихся: ρ_1 и ρ_2 ($|\rho_1| \geq |\rho_2|$). Неравенство $|\rho_{1,2}| < 1$ является необходимым и достаточным условием экспоненциальной орбитальной устойчивости цикла.

Мультипликаторы ρ_1 и ρ_2 задают степень устойчивости циклов к возмущению начальных данных. Значения $|\rho_{1,2}|$ указывают (асимптотически), во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот.

В стандартном сценарии бифуркаций удвоения периода мультипликаторы изменяются следующим образом. При переходе параметра через точку бифуркации из интервала I_{2^k} в интервал $I_{2^{k+1}}$ значение ρ_1 стремится к -1 , достигает -1 и после рождения цикла с удвоенным периодом принимает значение, равное $+1$. При этом ρ_2 остается внутри единичного круга.

На интервалах $I_1, I_2, \dots, I_{2^k}, \dots$ можно найти значения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2^k}, \dots$ параметра r , при которых $|\rho_1(r)|$ достигает минимума:

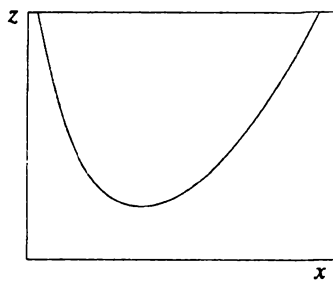
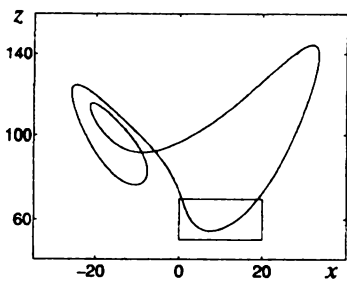
$$\tau_s = \operatorname{argmin}_{r \in I_s} |\rho_1|, \quad s = 1, 2, \dots, 2^k, \dots$$

Цикл, отвечающий значению $r = \tau_s$, является наиболее устойчивым в классе s -циклов на интервале I_s . Выделенные таким образом на интервалах I_s самые устойчивые циклы будем называть суперциклами.

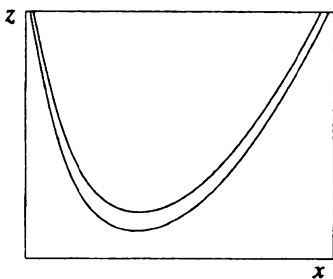
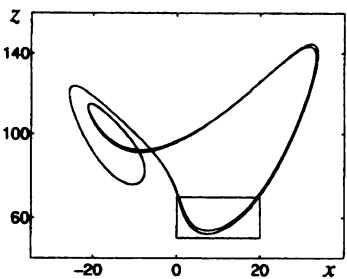
Для модели Лоренца имеем $\tau_1 = 100.563$, $\tau_2 = 99.803$, $\tau_4 = 99.5866$. Три проекции суперцикла \mathcal{M}_1 для τ_1 представлены на рис. 2.33.

На рис. 2.34 показаны суперциклы \mathcal{M}_2 для τ_2 и \mathcal{M}_4 для τ_4 , демонстрирующие удвоение периода.

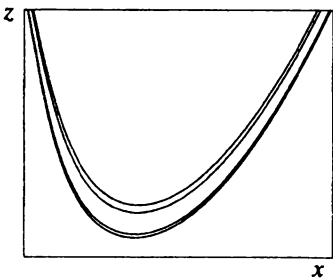
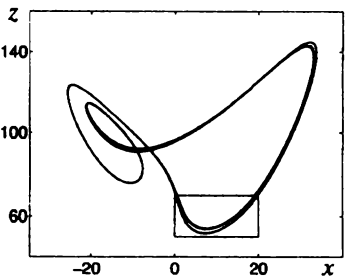
График $\rho_1(r)$ во всей исследуемой зоне удвоения периода представлен на рис. 2.39, а.



a



б



в

Рис. 2.34. Бифуркации удвоения периода:
a – для $r = 100.563$ (1-цикл); **б** – для $r = 99.803$ (2-цикл);
в – для $r = 99.5866$ (4-цикл)

На этом рисунке хорошо виден механизм бифуркации: на каждом из примыкающих друг к другу интервалах I_1, I_2, I_4, \dots функция $\rho_1(r)$ монотонно убывает от $+1$ до -1 , претерпевая скачки в точках бифуркаций.

Ветви графика $\rho_1(r)$ на интервалах I_1, I_2, I_4, \dots практически повторяют друг друга (самоподобие). Что касается $\rho_2(r)$, то эта функция практически не реагирует на изменения параметра r , сохраняя во всей зоне значения $|\rho_2(r)| \doteq 1.75 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, мультипликаторы не позволяют различать классы циклов различных кратностей.

Следует отметить еще одну важную деталь в поведении мультипликатора. Функция $\rho_1(r)$, непрерывно изменяя на интервале I_s свои значения от $+1$ до -1 , не может принимать значения, равные нулю (в противном случае матрица монодромии оказалась бы вырожденной).

Обход нуля происходит за счет выхода в комплексную плоскость. Функция $\rho_1(r)$ становится комплекснозначной (вместе с $\rho_2(r) = \bar{\rho}_1(r)$) лишь в малой окрестности значения r_k , отвечающего суперциклу. Во всей оставшейся части I_s она вещественна. Символически эта деталь изображается на графике $\rho_1(r)$ пустым кружком.

Стохастически возмущенная модель Лоренца при $r = 28$ исследовалась как прямым численным моделированием случайных траекторий [9, 10, 50, 127, 211, 283], так и аналитически [174, 207].

Появление шумов приводит к стохастической деформации детерминированных циклов. Под воздействием случайных возмущений траектории системы сходят с детерминированного цикла и формируют вокруг него некоторый пучок.

Исследование особенностей распределения случайных траекторий в пучке начнем методом прямого численного моделирования.

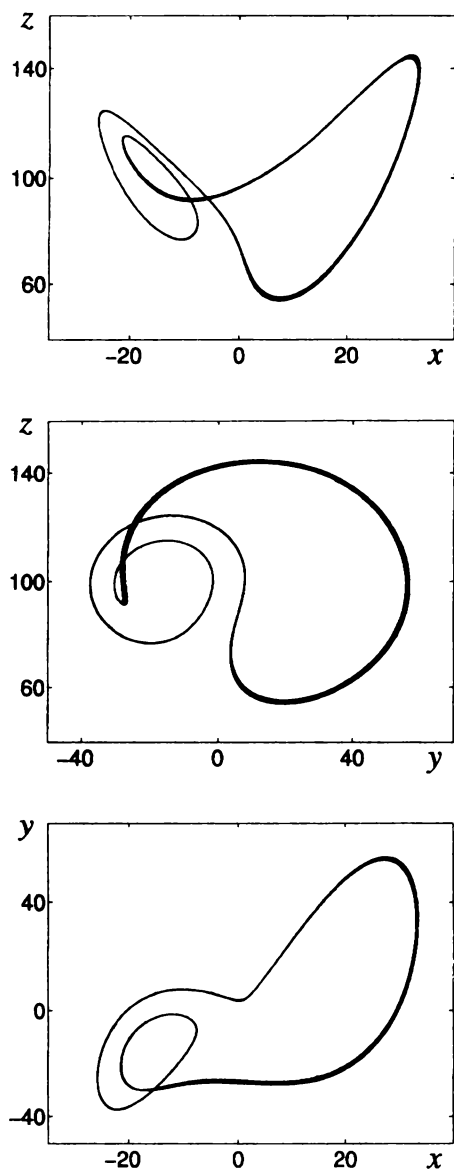


Рис. 2.35. Проекция случайных траекторий модели Лоренца для $r = 100.563$, $\varepsilon = 0.05$

Расчет детерминированных предельных циклов невозмущенной модели Лоренца проводился методом установления с использованием стандартной схемы Рунге – Кутты четвертого порядка с шагом $h = 10^{-4}$.

Для численного моделирования случайных траекторий стохастической модели Лоренца в детерминированную схему Рунге – Кутты на каждом шаге вносилась стохастическая добавка, соответствующая выбранным случайным возмущениям.

Проекция пучка случайных траекторий, полученных данной схемой, для суперцикла кратности один ($r_1 = 100.563$) и помех интенсивности $\varepsilon = 0.04$ представлены на рис. 2.35.

Как видно из рис. 2.35, случайные траектории распределены вокруг цикла весьма неравномерно.

Разброс пучка случайных траекторий в сечении плоскостью Π_t , ортогональной циклу, характеризуется эмпирической ковариационной матрицей $\tilde{D}(t, \varepsilon)$. Матрица

$$\widetilde{W}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{D}(t, \varepsilon)$$

является эмпирической функцией чувствительности цикла в точке $\xi(t)$ к воздействиям помех интенсивности ε . Ее положительные собственные значения $\tilde{\lambda}_1(t) \geq \tilde{\lambda}_2(t) > 0$ служат естественными скалярными характеристиками этой чувствительности.

На рис. 2.36 представлены значения (звездочки) $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$, вычисленные вдоль 1-цикла (при $r = 100.563$, $\varepsilon = 10^{-4}$), а на рис. 2.37 – вдоль 2-цикла (при $r = 99.803$, $\varepsilon = 10^{-7}$) по случайным траекториям, совершившим 100 оборотов вокруг цикла.

Чтобы исключить возможную зависимость получаемых результатов от используемого численного метода и шага интегрирования, были проведены контрольные расчеты другими методами и более мелкими шагами. Повторные расчеты дали аналогичные результаты.

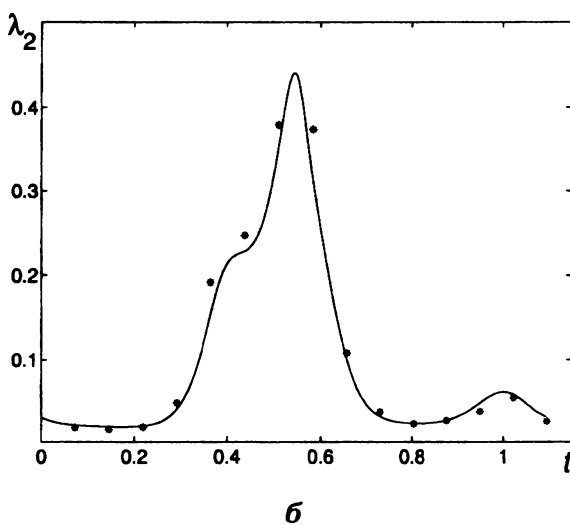
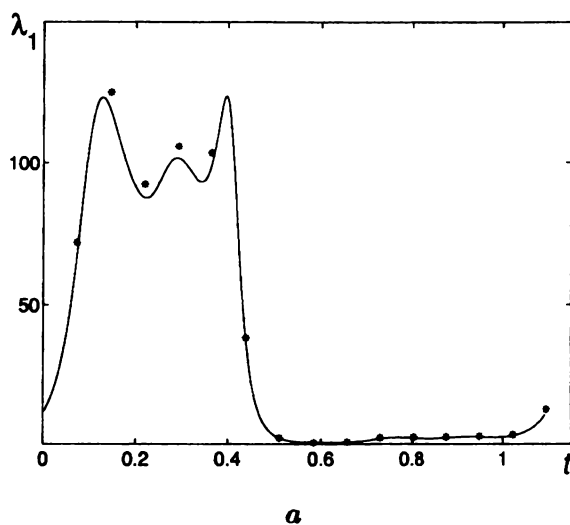
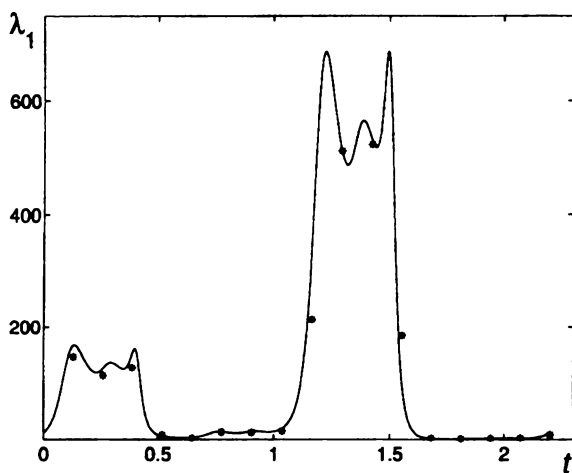
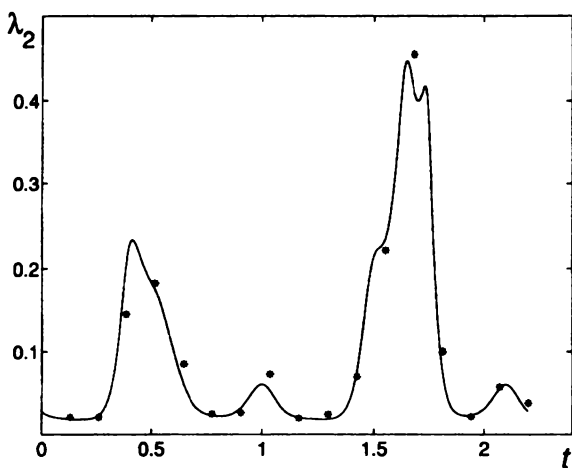


Рис. 2.36. Стохастическая чувствительность 1-цикла модели
Лоренца для $r = 100.563$, $\varepsilon = 10^{-4}$:
а – кривая λ_1 и значения (звездочки) $\tilde{\lambda}_1$; б – кривая λ_2 и значения
(звездочки) $\tilde{\lambda}_2$

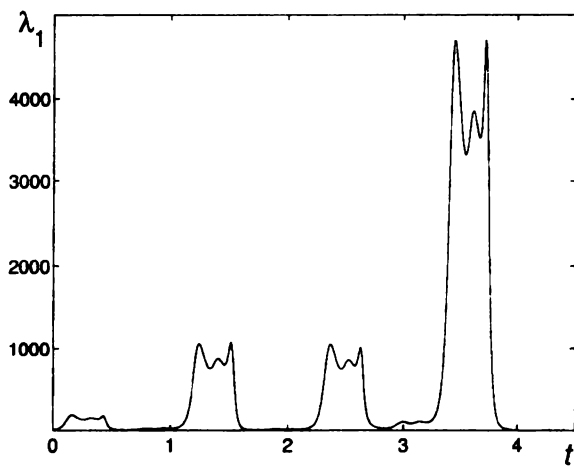


a

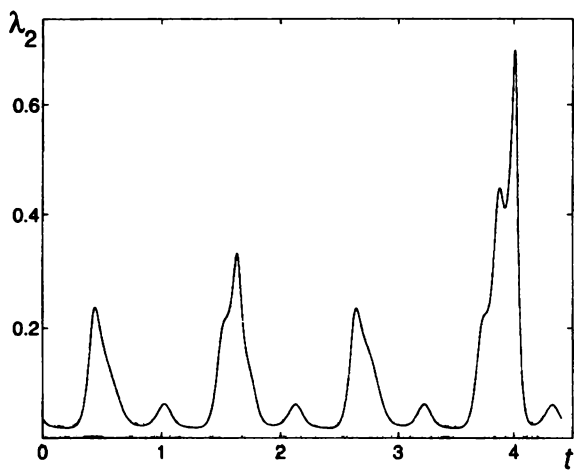


б

Рис. 2.37. Стохастическая чувствительность 2-цикла модели Лоренца для $r = 99.803$, $\varepsilon = 10^{-4}$:
a – кривая λ_1 и значения (звездочки) $\tilde{\lambda}_1$; **б** – кривая λ_2 и значения (звездочки) $\tilde{\lambda}_2$



a



б

Рис. 2.38. Стохастическая чувствительность 4-цикла модели
Лоренца для $r = 99.5866$:
 a – кривая λ_1 ; $б$ – кривая λ_2

Развиваемый в данной работе аппарат функций стохастической чувствительности позволяет описать распределение случайных траекторий вокруг невозмущенного детерминированного цикла с помощью матрицы $W(t)$.

Приведенный в разделе 2.3.5 алгоритм, использующий спектральное разложение $W(t)$, позволяет найти ее собственные числа $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$. Графики функций $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ (сплошная линия) для стохастических 1-, 2- и 4-циклов представлены на рис. 2.36–2.38.

Как видно из рис. 2.36 и 2.37, теоретические кривые $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, проходя вблизи значений $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ эмпирической функции чувствительности, хорошо передают основные качественные детали в ее поведении.

Таким образом, теоретическая функция чувствительности, задающая асимптотику стационарной плотности распределения при малых шумах в малой окрестности цикла хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными в ходе прямого численного моделирования. Это позволяет использовать ее в качестве основного инструмента анализа чувствительности сложных многооборотных циклов рассматриваемой модели Лоренца.

Каждая из функций $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ для 1-цикла имеет на интервале периодичности один явно выраженный всплеск.

В результате первой бифуркации удвоения периода траектория 1-цикла расщепляется в 2-цикл (рис. 2.34).

Соответственно функции чувствительности $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ имеют на интервале периодичности 2-цикла уже по два всплеска (рис. 2.37). Оба эти всплеска весьма похожи на всплеск, наблюдаемый для 1-цикла. Такое совпадение естественно, так как расщепление траектории 1-цикла весьма незначительно и оба витка 2-цикла очень близки графику 1-цикла (рис. 2.34). Неожиданной здесь является существенная разница этих всплес-

ков по высоте. Для $\lambda_1(t)$ правый всплеск выше левого почти в четыре раза. Еще большая разница в высоте всплесков наблюдается при расщеплении 2-цикла в 4-цикл (рис. 2.38). Таким образом, близкие витки циклов Лоренца имеют существенно различную степень стохастической чувствительности.

Функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ дают детальную информацию об особенностях пучка случайных траекторий в каждой точке цикла. Для описания стохастического цикла в целом будем использовать коэффициент чувствительности

$$M = \max_{t \in [0, T]} \lambda_1(t).$$

График величины M как функции параметра r представлен на рис. 2.39, б. Функция $M(r)$ описывает изменение чувствительности циклов при изменении параметра r .

Общий характер графика $M(r)$ на интервалах структурной устойчивости I_1, I_2, I_4, \dots качественно одинаков.

Минимум $M(r)$ на каждом интервале находится вблизи значений r_1, r_2, r_4, \dots , отвечающих суперциклам детерминированной системы. При движении от r_1 вправо и влево функция $M(r)$ монотонно растет и при приближении к точкам бифуркации стремится к бесконечности.

Однако сами минимальные значения $M_s = \min_{r \in I_s} M(r)$ при переходе от одного интервала к другому существенно меняются:

$$M_1 = 1.2 \cdot 10^2, \quad M_2 = 6.5 \cdot 10^2, \quad M_4 = 4.3 \cdot 10^3,$$

$$M_8 = 3.1 \cdot 10^4, \quad M_{16} = 2.1 \cdot 10^5.$$

Последовательность M_s быстро возрастает и асимптотически ведет себя как геометрическая прогрессия. При этом каждый переход в последующий интервал структурной устойчивости сопровождается увеличением чувствительности цикла в семь раз.

Подобная закономерность была обнаружена и в рассмотренной ранее модели Ресслера. Здесь, по-видимому, можно говорить о проявлении общего свойства универсальности.

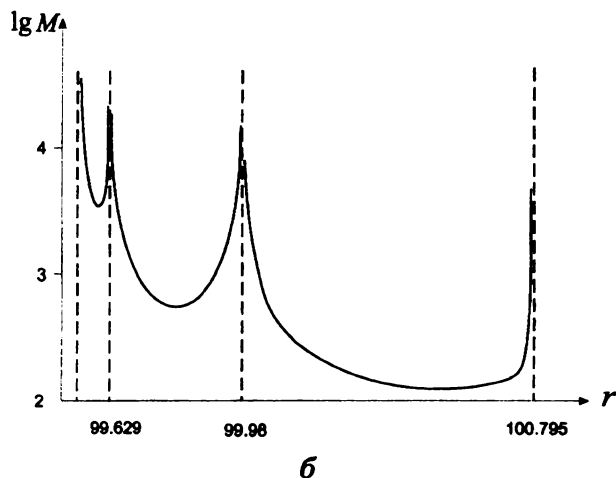
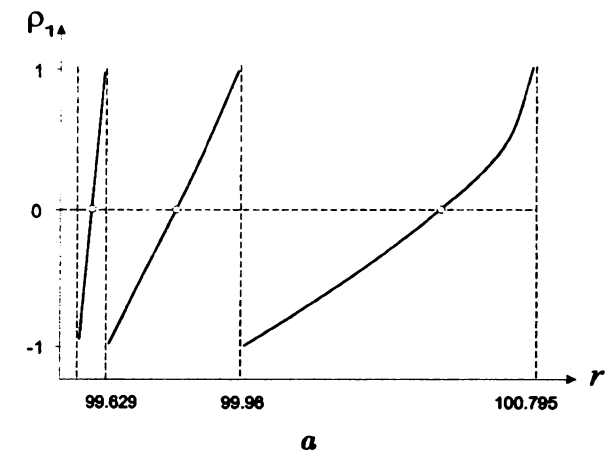


Рис. 2.39. Модель Лоренца:
a – мультипликатор $\rho_1(r)$; **b** – коэффициент стохастической чувствительности $M(r)$

Как видим, движение по цепочке удвоения периода по направлению от регулярного к хаотическому режиму (даже на начальных участках I_1, I_2, I_4) сопровождается существенным ростом значений функции чувствительности. Можно сказать, что функция чувствительности хорошо «предчувствует» хаос, сигнализируя о соответствующем росте чувствительности расщепляющихся циклов быстро растущими значениями M_1, M_2, M_4, \dots .

Представленные результаты опубликованы в [145]. Распространение изложенных методов на анализ стохастически возмущенных периодических аттракторов системы Чуа приведено в [248].

Исследование стохастических циклов модели Белоусова – Жаботинского при переходе к хаосу с использованием разработанной конструкции функции стохастической чувствительности представлено в [195]. Анализ индуцированных шумом переходов между сосуществующими циклами системы Лоренца проведен в [148].

2.3.8. Разложение функции стохастической чувствительности по малому параметру

Рассмотрим стохастический нелинейный осциллятор

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \delta f(x_1, x_2) + \varepsilon \sigma(x_1, x_2) \dot{w}, \end{cases} \quad (2.62)$$

где $w(t)$ – стандартный скалярный винеровский процесс, функция f задает динамику невозмущенной детерминированной системы, δ – малый параметр нелинейности, функция $\sigma(x_1, x_2)$ характеризует зависимость случайных возмущений от состояния системы, ε – интенсивность случайных возмущений.

Предполагается, что система (2.62) в отсутствие случайных

помех ($\varepsilon = 0$) при каждом $\delta > 0$ имеет экспоненциально устойчивый предельный цикл \mathcal{M}_δ , порождаемый решением

$$x(t, \delta) = \begin{bmatrix} x_1(t, \delta) \\ x_2(t, \delta) \end{bmatrix}$$

периода T_δ .

Для приведения таких решений к одному периоду $T = 2\pi$ введем вместо t новую переменную s :

$$s = \omega t, \quad \omega(\delta) = \frac{2\pi}{T_\delta}.$$

Тогда (2.62) перепишется в виде

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\omega} x_2 \\ x'_2 = \frac{1}{\omega} (-x_1 + \delta f(x_1, x_2)) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sigma(x_1, x_2) \dot{w}_1, \end{cases} \quad (2.63)$$

где $x'_i = \frac{dx_i}{ds}$ ($i = 1, 2$), $w_1(s) = \sqrt{\omega} w(s/\omega)$ – стандартный винеровский процесс, а каждый предельный цикл \mathcal{M}_δ будет задаваться 2π -периодическим решением

$$x(s, \delta) = \begin{bmatrix} x_1(s, \delta) \\ x_2(s, \delta) \end{bmatrix}$$

системы (2.63) при $\varepsilon = 0$.

Интересующая нас функция стохастической чувствительности $\mu(s, \delta)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu' = a(s, \delta)\mu + b(s, \delta). \quad (2.64)$$

Коэффициенты

$$a = p^\top [F^\top + F] p, \quad b = p^\top S p$$

для системы (2.63), благодаря соотношениям

$$F = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \delta f'_{x_1} & \delta f'_{x_2} \end{bmatrix}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{bmatrix} -x_1 + \delta f \\ -x_2 \end{bmatrix},$$

$$S = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}, \quad r = x_1^2 + x_2^2 - 2\delta x_1 f + \delta^2 f^2,$$

выражаются через координаты $x_1 = x_1(s, \delta)$, $x_2 = x_2(s, \delta)$:

$$a(s, \delta) = \frac{2\delta}{r\omega} (x_1 x_2 f'_{x_1} + x_2^2 f'_{x_2} - \delta x_2 f f'_{x_1}),$$

$$b(s, \delta) = \frac{1}{r\omega} \sigma^2 x_2^2.$$

Будем исходить из того, что для функций $x_1(s, \delta)$, $x_2(s, \delta)$ и $\omega(\delta)$ уже получены асимптотические разложения:

$$x_1(s, \delta) = x_{10}(s) + \delta x_{11}(s) + \dots,$$

$$x_2(s, \delta) = x_{20}(s) + \delta x_{21}(s) + \dots, \quad (2.65)$$

$$\omega(\delta) = \omega_0 + \delta \omega_1 + \dots$$

Используя (2.65), найдем разложения

$$f(x_1(s, \delta), x_2(s, \delta)) = f_0(s) + \delta f_1(s) + \dots,$$

$$\sigma(x_1(s, \delta), x_2(s, \delta)) = \sigma_0(s) + \delta \sigma_1(s) + \dots,$$

$$r(x_1(s, \delta), x_2(s, \delta)) = r_0(s) + \delta r_1(s) + \dots,$$

$$f'_i(x_1(s, \delta), x_2(s, \delta)) = f_{i0}(s) + \delta f_{i1}(s) + \dots, \quad (2.66)$$

где

$$f_0(s) = f(x_{10}(s), x_{20}(s)),$$

$$f_1(s) = f_{10}(s)x_{11}(s) + f_{20}(s)x_{21}(s),$$

$$\sigma_0(s) = \sigma(x_{10}(s), x_{20}(s)),$$

$$\sigma_1(s) = \sigma'_{x_1}(x_{10}(s), x_{20}(s))x_{11}(s) + \sigma'_{x_2}(x_{10}(s), x_{20}(s))x_{21}(s),$$

...

$$r_0(s) = x_{10}^2(s) + x_{20}^2(s),$$

$$r_1(s) = 2x_{10}(s)x_{11}(s) + 2x_{20}(s)x_{21}(s) - 2x_{10}(s)f_0(s),$$

...

$$f_{i0} = f'_{x_i}(x_{10}(s), x_{20}(s)),$$

$$f_{i1} = f''_{x_i x_1}(x_{10}(s), x_{20}(s))x_{11}(s) + f''_{x_i x_2}(x_{10}(s), x_{20}(s))x_{21}(s),$$

...

$$(i = 1, 2).$$

Разложения a и b по степеням δ имеют вид

$$\begin{aligned} a(s, \delta) &= \delta a_1(s) + \delta^2 a_2(s) + \dots, \\ b(s, \delta) &= b_0(s) + \delta b_1(s) + \delta^2 b_2(s) + \dots \end{aligned} \tag{2.67}$$

При этом коэффициенты разложений (2.65) – (2.67) связаны равенствами

$$b_0 = \frac{x_{20}^2 \sigma_0^2}{r_0 \omega_0},$$

$$a_1 = \frac{2x_{20}}{r_0 \omega_0} (x_{10} f_{10} + x_{20} f_{20}),$$

$$b_1 = \frac{1}{r_0 \omega_0} \left[2\sigma_0 \sigma_1 x_{20}^2 + 2\sigma_0^2 x_{20} x_{21} - \frac{b_0}{2} (r_1 \omega_0 + r_0 \omega_1) \right],$$

$$a_2 = \frac{2}{r_0 \omega_0} [x_{11} x_{20} f_{10} + x_{10} x_{21} f_{10} + x_{10} x_{20} f_{11} + 2x_{20} x_{21} f_{20} + \\ + x_{20}^2 f_{21} - x_{20} f_0 f_{10} - \frac{a_1}{2} (r_1 \omega_0 + r_0 \omega_1)],$$

(2.68)

Решение $\mu(s, \delta)$ уравнения (2.64) будем искать в виде

$$\mu(s) = \delta^{-1} \mu_{-1}(s) + \mu_0(s) + \delta \mu_1(s) + \dots, \quad (2.69)$$

где μ_n – периодические функции ($\mu_n(2\pi) = \mu_n(0)$).

Подставив в уравнение (2.64) ряды (2.67), (2.69) и приравняв члены при одинаковых степенях δ , получим систему линейных дифференциальных уравнений для коэффициентов μ_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu'_{-1} = 0 \\ \mu'_0 = a_1 \mu_{-1} + b_0 \\ \mu'_1 = a_1 \mu_0 + a_2 \mu_{-1} + b_1 \\ \dots \\ \mu'_n = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \mu_{n-i} + b_n \\ \dots \end{array} \right. \quad (2.70)$$

Условие периодичности позволяет единственным образом найти решения $\mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \dots$. Из первого уравнения системы (2.70) находим, что μ_{-1} – константа. Проинтегрировав обе части второго уравнения по отрезку $[0, 2\pi]$ с учетом равенства $\mu(T) = \mu(0)$, получим

$$\int_0^{2\pi} (a_1(\tau)\mu_{-1} + b_0(\tau))d\tau = 0,$$

откуда находим

$$\mu_{-1} = -\frac{\int_0^{2\pi} b_0(\tau)d\tau}{\int_0^{2\pi} a_1(\tau)d\tau}.$$

В общем случае справедлива рекуррентная формула

$$\mu_n(s) = \rho_n(s) + c_n, \quad (2.71)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_n(s) &= \int_0^s \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i(\tau)\mu_{n-i}(\tau) + b_n(\tau) \right) d\tau, \\ c_n &= -\frac{\int_0^{2\pi} (a_1(\tau)\rho_n(\tau) + \psi_n(\tau)) d\tau}{\int_0^{2\pi} a_1(\tau)d\tau}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\psi_n(s) = \sum_{i=2}^{n+2} a_i(s)\mu_{n+1-i}(s) + b_{n+1}(s).$$

Полученные здесь рекуррентные разложения функции стохастической чувствительности для нелинейного осциллятора общего вида можно применить к анализу стохастических автоколебаний в тех или иных конкретных нелинейных системах [15].

Разложение ФСЧ для стохастического уравнения Ван-дер-Поля

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля с малым аддитивным шумом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \delta x_2(1 - x_1^2) + \varepsilon \dot{w}. \end{cases} \quad (2.73)$$

После замены переменной $s = \omega t$ система (2.73) примет вид

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{\omega} x_2 \\ x'_2 = \frac{1}{\omega} (-x_1 + \delta x_2(1 - x_1^2)) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\omega}} \dot{w}_1. \end{cases} \quad (2.74)$$

Рассмотрим разложение ФСЧ на основе метода Крылова – Боголюбова.

Разложение Крылова – Боголюбова [21] по степеням δ функций $x_1(s, \delta)$, $x_2(s, \delta)$ и $\omega(\delta)$ дает:

$$x_1(s, \delta) = 2 \cos s + \delta \left(-\frac{1}{4} \sin 3s \right) + \delta^2 \left(-\frac{3}{32} \cos 3s - \frac{5}{96} \cos 5s \right) + \dots$$

$$x_2(s, \delta) = -2 \sin s + \delta \left(-\frac{3}{4} \cos 3s \right) + \delta^2 \left(\frac{9}{32} \sin 3s + \frac{25}{96} \sin 5s \right) + \dots$$

$$\omega(\delta) = 1 + \delta \cdot 0 - \delta^2 \frac{1}{16} + \delta^3 \cdot 0 + \dots$$

Тогда

$$f(x_1(s, \delta), x_2(s, \delta)) = 2 \sin 3s + \delta \left(\frac{1}{4} \cos s + \frac{3}{4} \cos 3s + \frac{5}{4} \cos 5s \right) + \dots$$

$$\sigma(x_1(s, \delta), x_2(s, \delta)) = 1.$$

По формулам (2.68) для коэффициентов разложений (2.67) находим

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2s), \\ a_1 &= -2 - \cos 2s + 3 \cos 4s, \\ b_1 &= \frac{3}{16}(\sin 2s + 2 \sin 4s - \sin 6s), \\ a_2 &= -\frac{11}{8} \sin 2s - \sin 4s - \frac{25}{8} \sin 6s + \frac{9}{8} \sin 8s, \end{aligned} \quad (2.75)$$

Используя (2.71), (2.72) и (2.75), находим коэффициенты μ_{-1} , μ_0 , μ_1 разложения (2.69):

$$\begin{aligned} \mu_{-1} &= \frac{1}{4}, \quad \mu_0 = -\frac{3}{8} \sin 2s + \frac{3}{16} \sin 4s, \\ \mu_1 &= \frac{61}{512} - \frac{17}{32} \cos 2s + \frac{1}{64} \cos 4s + \frac{13}{48} \cos 6s - \frac{9}{128} \cos 8s. \end{aligned}$$

В результате для функции $\mu(s, \delta)$ можно указать следующие приближения:

$$\begin{aligned} \mu^{(0)}(s, \delta) &= \mu_{-1}(s)\delta^{-1} + \mu_0(s), \\ \mu^{(1)}(s, \delta) &= \mu_{-1}(s)\delta^{-1} + \mu_0(s) + \mu_1(s)\delta \end{aligned}$$

различных порядков.

На рис. 2.40 для $\delta = 0.5$ представлены графики полученных приближений $\mu^{(0)}(s)$ (пунктирная линия), $\mu^{(1)}(s)$ (линия из точек).

Эталонный график $\mu(s)$ (сплошная линия) получен методом Рунге – Кутта с шагом $h = 10^{-4}$ (численные эксперименты показали, что при данном шаге погрешность не превосходит ширины изображаемой линии).

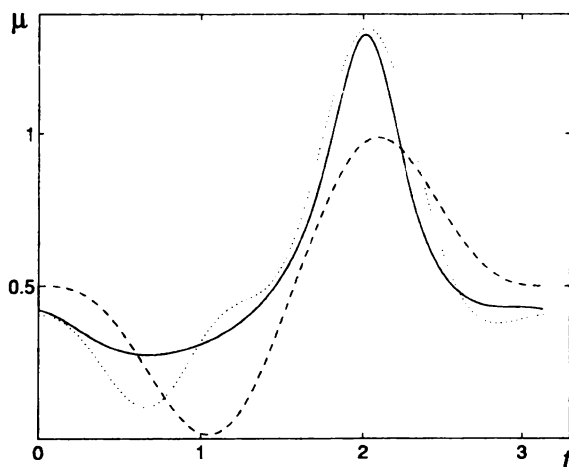


Рис. 2.40. Приближения функции стохастической чувствительности

Для $\delta = 0.01; 0.05; 0.1; 0.5$ погрешности

$$d_i = \max |\mu^{(i)}(s) - \mu(s)|$$

найденных приближений приведены в таблице.

| δ | d_0 | d_1 |
|----------|-------|--------|
| 0.01 | 0.018 | 0.0020 |
| 0.05 | 0.081 | 0.0067 |
| 0.1 | 0.16 | 0.0205 |
| 0.5 | 0.71 | 0.4968 |

Приведенный пример демонстрирует, что разложения, содержащие всего два-три члена, с достаточно высокой точностью аппроксимируют функцию стохастической чувствительности. В частности, при помощи этих разложений удастся найти местоположение и величину пиков ФСЧ, что позволяет указать участок орбиты, наиболее чувствительный к действующим

щим на систему случайным возмущениям. Полученные аппроксимации могут быть использованы и для детального описания распределения пучка случайных траекторий, сформированного в ходе стохастически возмущенного движения вдоль орбиты.

2.4. Стохастическая чувствительность 2-торов

Рассмотрим случай, когда инвариантным многообразием M детерминированной системы (1.1) является лежащая в \mathbb{R}^n двумерная тороидальная поверхность (M – 2-тор). Предполагается, что 2-тор M является Э-устойчивым.

Излагаемый ниже метод анализа стохастической чувствительности этого многообразия к воздействию случайных возмущений системы (2.1) использует естественную параметризацию тороидальной поверхности M (см. главу 1), задаваемую лежащими на M решениями системы (1.1).

Напомним основные конструкции. На тороидальной поверхности M (см. рис. 1.1) лежит замкнутая гладкая кривая ϑ (экватор), задаваемая функцией $\vartheta(s)$ на интервале $0 \leq s \leq 1$ с условием $\vartheta(0) = \vartheta(1)$.

Из каждой точки $\vartheta(s)$ кривой ϑ , как начальной, выходит решение $x(t, s)$ системы (1.1) с условием $x(0, s) = \vartheta(s)$. Предполагается, что траектория $x(t, s)$, обойдя вокруг тора M , через некоторое время вновь пересечет кривую ϑ .

С семейством решений $x(t, s)$ связаны функции $T(s)$ и $\tau(s)$. Здесь $T(s) = \min\{t > 0 \mid x(t, s) \in \vartheta\}$ – момент первого возвращения траектории $x(t, s)$ на кривую ϑ , при этом $x(T(s), s)$ есть точка возвращения; $\tau(s)$ – функция последования сечений Пуанкаре кривой ϑ фазовыми траекториями системы (1.1) ($\vartheta(\tau(s)) = x(T(s), s)$).

Предполагается, что фазовые траектории семейства решений $x(t, s)$ системы (1.1) полностью покрывают тороидальную

поверхность \mathcal{M} . Функция $x(t, s)$ рассматривается на плоскости

$$\Pi = \{(t, s) | -\infty < t < +\infty, -\infty < s < +\infty\}$$

и удовлетворяет равенствам

$$x(t, s + 1) = x(t, s), \quad x(T(s) + t, s) = x(t, \tau(s)). \quad (2.76)$$

Вектор-функции

$$y(t, s) = \frac{\partial x(t, s)}{\partial t}, \quad u(t, s) = \frac{\partial x(t, s)}{\partial s}, \quad (2.77)$$

сопровождающие решения $x(t, s)$, линейно независимы и задают плоскость $T_{x(t, s)}$, касательную к тороидальной поверхности в точке $x(t, s)$. Здесь важную роль играют матрицы, связанные с проекторами на подпространство, ортогональное тороидальной поверхности. Рассмотрим проекционную матрицу $P(t, s) = P_{y(t, s), u(t, s)}$, где $y(t, s), u(t, s)$ из (2.77), а матрица $P_{y, u}$, задающая оператор проектирования на подпространство, ортогональное плоскости, натянутой на векторы y, u , находится из соотношений

$$P_{y, u} = P_y - \frac{P_y u u^\top P_y}{u^\top P_y u}, \quad P_y = I - \frac{y y^\top}{y^\top y}, \quad r(P_{y, u}) = n - 2.$$

Пространство Σ (см. раздел 1.4) составляют симметрические $n \times n$ -матрицы, определенные и достаточно гладкие на Π с условиями согласования (см. (2.76)):

$$\forall (t, s) \in \Pi \quad V(t, s + 1) = V(t, s), \quad V(T(s) + t, s) = V(t, \tau(s)) \quad (2.78)$$

и вырожденности

$$\forall (t, s) \in \Pi \quad \forall z \in T_{x(t, s)} \quad V(t, s)z = 0. \quad (2.79)$$

В пространстве Σ рассматриваются конус

$$\mathcal{K} = \{V \in \Sigma \mid V(t, s) \text{ — неотрицательно определенная матрица } \forall (t, s) \in \Pi\}$$

$$\mathcal{K}_P = \{V \in \Sigma \mid V - P\text{-положительно определенная}\}.$$

В рассматриваемом здесь случае в соответствии с общей теорией (см. раздел 2.1) исследование стохастической чувствительности 2-тора \mathcal{M} для системы (2.1) сводится к анализу решения $W(t, s)$ линейного матричного уравнения

$$\frac{\partial W(t, s)}{\partial t} = F(t, s)W(t, s) + W(t, s)F^\top(t, s) + P(t, s)S(t, s)P(t, s) \quad (2.80)$$

в пространстве Σ . Коэффициенты уравнения (2.80) связаны с системой (2.1) соотношениями

$$F(t, s) = \frac{\partial f(x(t, s))}{\partial x}, \quad S(t, s) = G(t, s)G^\top(t, s), \\ G(t, s) = \sigma(x(t, s)).$$

Матрица $W(t, s)$ имеет следующий вероятностный смысл. Для нелинейных систем (1.1), (2.1) рассмотрим соответствующие линейные системы первого приближения

$$dz = F(t, s)zdt, \quad (2.81)$$

$$dz = F(t, s)zdt + \varepsilon P(t, s)G(t, s)dw(t). \quad (2.82)$$

Система (2.81), благодаря предполагаемой Э-устойчивости 2-тора \mathcal{M} , является P -устойчивой. По теореме 2.1 P -устойчивость гарантирует существование и единственность решения W системы (2.78)–(2.80).

Стохастическая система (2.82) (см. теорему 2.1) имеет некоторый установившийся режим, связанный с решением \bar{z} . Матрица W задает ковариацию случайного процесса \bar{z} :

$$\text{cov}(\bar{z}(t, s), \bar{z}(t, s)) = \varepsilon^2 W(t, s).$$

Матрица W является функцией стохастической чувствительности тороидального многообразия M . Значения $W(t, s)$ определяют эту чувствительность в текущей точке $x(t, s)$ многообразия. Матрица $\varepsilon^2 W(t, s)$ служит оценкой ковариации разброса случайных траекторий нелинейной стохастической системы (2.1) в их сечении с нормальной гиперплоскостью $N_{x(t,s)}$.

2.4.1. Чувствительность 2-тора в трехмерном пространстве

Рассмотрим систему (2.1) при $n = 3$. Матрица проектирования $P(t, s)$ имеет в этом случае ранг, равный единице, и может быть представлена в виде $P(t, s) = p(t, s)p^T(t, s)$, где $p(t, s)$ — вектор единичной длины — задает нормальную прямую $N_{x(t,s)}$ и ортогонален векторам $y(t, s)$ и $u(t, s)$ из (2.77). При этом матрица W решения системы (2.78)–(2.80), задающая разброс случайных траекторий вблизи 2-тора, также имеющая ранг, равный единице, может быть записана в виде

$$W(t, s) = \mu(t, s)P(t, s).$$

Матрица проектирования $P(t, s)$ однозначно находится по исходной детерминированной тороидальной поверхности M .

Таким образом, задача построения стохастической функции чувствительности здесь сводится к отысканию скалярной функции $\mu(t, s)$. Эта функция задает дисперсию разброса случайных траекторий в направлении нормали $N_{x(t,s)}$ к тору M в точке $x(t, s)$.

Лемма 2.4. Матрица $W(t, s) = \mu(t, s)P(t, s)$ является решением системы (2.78)–(2.80) тогда и только тогда, когда скалярная функция $\mu(t, s)$ является решением системы

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, s) = a(t, s)\mu(t, s) + b(t, s) \quad (2.83)$$

с условиями

$$\mu(t, s+1) = \mu(t, s), \quad (2.84)$$

$$\mu(T(s) + t, s) = \mu(t, \tau(s)). \quad (2.85)$$

Здесь

$$a(t, s) = p^\top(t, s)[F^\top(t, s) + F(t, s)]p(t, s),$$

$$b(t, s) = p^\top(t, s)S(t, s)p(t, s).$$

Доказательство. Подставляя решение

$$W(t, s) = \mu(t, s)p(t, s)p^\top(t, s)$$

в уравнение (2.80), получим

$$\dot{\mu}pp^\top + \mu(\dot{p}p^\top + p(\dot{p})^\top) = \mu(Fpp^\top + pp^\top F^\top) + pp^\top Spp^\top.$$

Умножая это соотношение слева на p^\top и справа на p , учитывая тождества $p^\top p \equiv 1$, $(p^\top \dot{p}) = \dot{p}^\top p + p^\top \dot{p} \equiv 0$, получим уравнение для μ :

$$\dot{\mu} = p^\top(F + F^\top)p\mu + p^\top Sp.$$

Условия (2.84), (2.85) следуют из (2.78), (2.79).

Доказательство обратного утверждения легко следует из приведенных выше выкладок. Лемма 2.4 доказана.

Как видим, при $n = 3$ отыскание функции стохастической чувствительности для двумерной тороидальной поверхности сводится к решению скалярного уравнения (2.83) с условиями (2.84), (2.85).

Общее решение уравнения (2.83) имеет вид

$$\mu(t, s) = g(t, s)[c(s) + h(t, s)], \quad (2.86)$$

где $g(t, s)$ и $h(t, s)$ – известные функции:

$$g(t, s) = \exp \left(\int_0^t a(\tau, s) d\tau \right), \quad h(t, s) = \int_0^t \frac{b(\tau, s)}{g(\tau, s)} d\tau, \quad (2.87)$$

а $c(s)$ – неизвестная функция, играющая для $\mu(t, s)$ роль начальной: $\mu(0, s) = c(s)$. Условие (2.84) приводит к уравнению $c(s + 1) = c(s)$. Условие (2.85) ведет к соотношению

$$g(T(s), s)[c(s) + h(T(s), s)] = c(\tau(s)).$$

Обозначим

$$\alpha(s) = g(T(s), s), \quad \beta(s) = \alpha(s)h(T(s), s). \quad (2.88)$$

В итоге для искомой функции $c(s)$ получаем функциональное уравнение

$$c(\tau(s)) = \alpha(s)c(s) + \beta(s) \quad (2.89)$$

с условием

$$c(s + 1) = c(s). \quad (2.90)$$

Таким образом, построение функции стохастической чувствительности $\mu(t, s)$ для 2-тора в трехмерном пространстве по формулам (2.86), (2.87) сводится к решению функционального уравнения (2.89) с условием (2.90). Существование и единственность решения системы (2.89), (2.90) в случае Э-устойчивости 2-тора M непосредственно следует из существования и единственности решения системы (2.78)–(2.80).

Решение $\bar{c}(s)$ системы (2.89), (2.90) может быть найдено методом установления.

Рассмотрим последовательности $s_0 = s, s_1, \dots, s_k, \dots$, где $s_{k+1} = \tau(s_k)$, и $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k, \dots$, где $\bar{c}_k = \bar{c}(s_k)$. Значения \bar{c}_k , благодаря (2.89), связаны уравнением

$$\bar{c}_{k+1} = \alpha_k \bar{c}_k + \beta_k, \quad \alpha_k = \alpha(s_k), \quad \beta_k = \beta(s_k). \quad (2.91)$$

Для элементов \bar{c}_k рассмотрим приближения s_k , задаваемые рекуррентной формулой $s_{k+1} = \alpha_k s_k + \beta_k$, где s_0 – некоторое приближение для \bar{c}_0 .

Теорема 2.4. Пусть тор \mathcal{M} системы (1.1) является Э-устойчивым. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} (c_k - \bar{c}_k) = 0$ независимо от выбора начального приближения c_0 .

Доказательство. Погрешность $r_k = c_k - \bar{c}_k$ удовлетворяет уравнению $r_{k+1} = \alpha_k r_k$ и связана с погрешностью r_0 соотношением $r_k = q_k r_0$, где $q_k = \prod_{i=0}^{k-1} \alpha_i$. Для величины q_k справедливо [109] представление

$$q_k = \exp \left(\int_0^{T_k(s)} a(t, s) dt \right),$$

где $T_k(s)$ – время, необходимое для прохождения траектории $x(t, s)$ по спирали, состоящей из k витков.

Необходимым и достаточным условием Э-устойчивости тора \mathcal{M} в системе (1.1) является [109] неравенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(t, s) dt < 0. \quad (2.92)$$

Условие (2.92) означает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 0$ и, следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$ независимо от выбора c_0 .

П р и м е р

Рассмотрим в трехмерном пространстве переменных (x, y, z) 2-тор \mathcal{M} , задаваемый уравнением

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = r_0^2, \quad 0 < r_0 < 1.$$

В канонических переменных r, φ, ψ , связанных с исходными переменными x, y, z соотношениями

$$x = (2 + r \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (2 + r \cos \psi) \sin \varphi, \quad z = r \sin \psi,$$

тороидальная поверхность задается следующим образом:

$$r = r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Рассмотрим в новых переменных стохастическую систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r) + \varepsilon \sqrt{\sigma(\varphi, \psi)} \dot{w}, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\psi} &= \nu, \end{aligned} \tag{2.93}$$

где $f(r) = \frac{A}{4}r \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]$, $\sigma(\varphi, \psi) = 1 + B \cos(\varphi) + D \cos(\psi)$,

$w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Поскольку $f(r_0) = 0$, то для системы (2.93) при $\varepsilon = 0$ тор \mathcal{M} является инвариантным многообразием и может быть параметрически задан семейством ее решений

$$r(t) \equiv r_0, \quad \varphi(t, s) = \omega t + 2\pi s, \quad \psi(t) = \nu t.$$

Здесь роль одного из параметров играет время t , а параметр s задает начальное состояние $\varphi(0, s) = 2\pi s$. При этом

$$T(s) = \frac{2\pi}{\nu}, \quad \tau(s) = \frac{\omega}{\nu} + s.$$

Необходимым и достаточным условием Э-устойчивости детерминированного тора \mathcal{M} будет неравенство $A < 0$.

Найдем функции $g(t, s)$, $h(t, s)$ и $c(s)$, задающие стохастическую функцию чувствительности (2.86) тора \mathcal{M} для системы (2.93). В нашем примере коэффициенты уравнения (2.83) имеют вид

$$a(t, s) \equiv A, \quad b(t, s) = \sigma(\omega t + 2\pi s, \nu t) = 1 + B \cos(\omega t + 2\pi s) + D \cos(\nu t).$$

Из (2.87) следует

$$g(t, s) = e^{At},$$

$$\begin{aligned}
h(t, s) = & \frac{1}{A}(1 - e^{-At}) + \frac{B}{A^2 + \omega^2} [e^{-At}(-A \cos(\omega t + 2\pi s) + \\
& + \omega \sin(\omega t + 2\pi s)) + A \cos 2\pi s - \omega \sin 2\pi s] + \\
& + \frac{D}{A^2 + \nu^2} [e^{-At}(-A \cos(\nu t) + \nu \sin(\nu t)) + A].
\end{aligned}$$

Коэффициенты (2.88) имеют вид

$$\alpha(s) \equiv \alpha = e^{\frac{2\pi A}{\nu}},$$

$$\begin{aligned}
\beta(s) = \alpha \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} e^{-A\tau} (1 + B \cos(\omega\tau + 2\pi s) + D \cos(\nu\tau)) d\tau = \\
= K_0 + K_1 \cos(2\pi s) + K_2 \sin(2\pi s),
\end{aligned}$$

где

$$K_0 = (\alpha - 1) \left(\frac{1}{A} + \frac{AD}{A^2 + \nu^2} \right),$$

$$K_1 = \frac{B}{A^2 + \omega^2} (-A \cos \eta + \omega \sin \eta + A\alpha),$$

$$K_2 = \frac{B}{A^2 + \omega^2} (A \sin \eta + \omega \cos \eta - \omega\alpha), \quad \eta = \frac{2\pi\omega}{\nu}.$$

В рассматриваемом примере функциональное уравнение (2.89)–(2.90) имеет аналитическое решение:

$$c(s) = c_0 + c_1 \cos(2\pi s) + c_2 \sin(2\pi s),$$

где

$$c_0 = \frac{K_0}{1 - \alpha}, \quad c_1 = \frac{K_1(\cos \eta - \alpha) - K_2 \sin \eta}{1 - 2\alpha \cos \eta + \alpha^2},$$

$$c_2 = \frac{K_2(\cos \eta - \alpha) + K_1 \sin \eta}{1 - 2\alpha \cos \eta + \alpha^2}.$$

В итоге получаем стохастическую функцию чувствительности

$$\begin{aligned} \mu(t, s) = & e^{At}(c_1 \cos(2\pi s) + c_2 \sin(2\pi s) + \\ & + \frac{B}{A^2 + \omega^2}(A \cos(2\pi s) - \omega \sin(2\pi s))) + \frac{B}{A^2 + \omega^2}(-A \cos(\omega t + 2\pi s) + \\ & + \omega \sin(\omega t + 2\pi s)) + \frac{D}{A^2 + \nu^2}(-A \cos(\nu t) + \nu \sin(\nu t)) - \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

Данная формула задает связь значений стохастической функции чувствительности с параметрами системы.

Рассмотрим зависимость функции чувствительности μ от параметров A , B , D , ω и ν .

При уменьшении параметра A функция μ убывает. Параметр A характеризует степень устойчивости детерминированного тора.

Как видим, увеличение степени устойчивости детерминированного тора ведет к уменьшению стохастической чувствительности. Параметры B и D характеризуют перепад интенсивности случайных возмущений при движении вблизи тора. Увеличение B и D приводит к соответствующему увеличению перепада значений стохастической чувствительности μ .

Зависимость μ от частот вращений ω и ν удобно изобразить графически.

На рис. 2.41 представлены графики функции стохастической чувствительности $\mu(t_k, s)$ при $A = -1$, $B = 0.5$, $D = 0.4$ для различных значений параметров ω и ν при некотором наборе t_k .

Как видно из рис. 2.41, значения μ при движении вдоль тороидальной поверхности существенно изменяются:

- а) при $\omega = 1$, $\nu = 1$ значения μ лежат в интервале (0.4, 1.6);
- б) при $\omega = 1$, $\nu = 3$ значения μ лежат в интервале (0.5, 1.5);
- в) при $\omega = 3$, $\nu = 1$ значения μ лежат в интервале (0.6, 1.4);

г) при $\omega = 3$, $\nu = 3$ значения μ лежат в интервале (0.7, 1.3).

Соответствующим образом будет меняться и разброс случайных траекторий около тороидальной поверхности.

Увеличение частот вращения ω и ν , приводящее к увеличению скорости движения вдоль тороидальной поверхности, ведет к уменьшению перепада значений стохастической функции чувствительности μ .

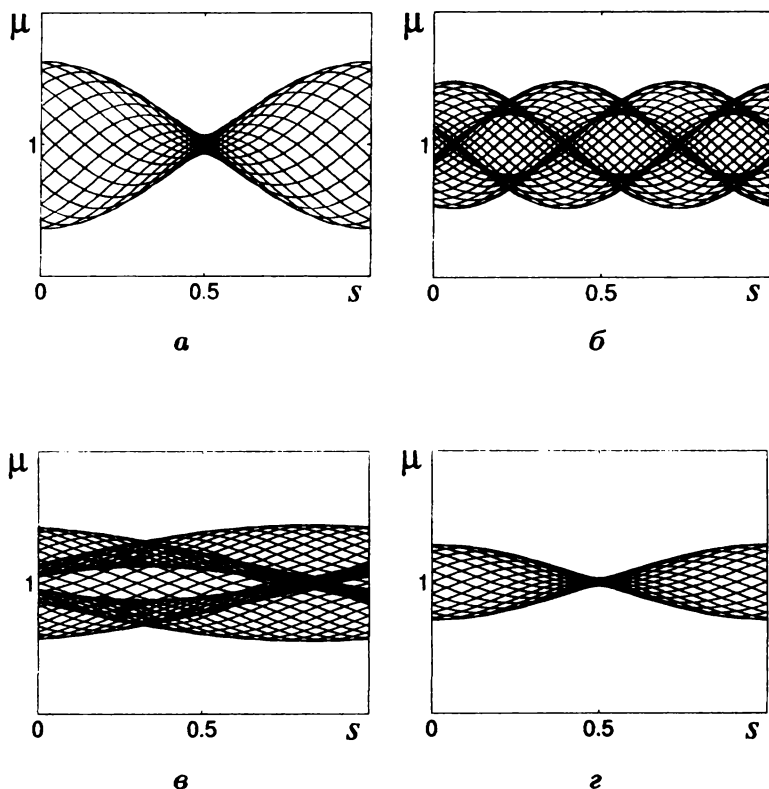


Рис. 2.41. Функция стохастической чувствительности тора:

а – для $\omega = 1$, $\nu = 1$; б – для $\omega = 1$, $\nu = 3$;

в – для $\omega = 3$, $\nu = 1$; г – для $\omega = 3$, $\nu = 3$.

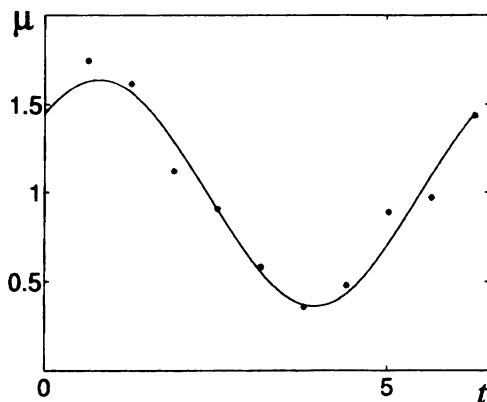


Рис. 2.42. Теоретическая (сплошная линия) и эмпирическая (звездочки) стохастическая чувствительность

Увеличение ω и ν улучшает стохастическое перемешивание случайных траекторий, делая их разброс около тора более однородным.

На рис. 2.42 для $A = -1$, $B = 0.5$, $D = 0.4$, $\omega = 1$, $\nu = 1$ представлен график (сплошная линия) теоретической функции чувствительности $\mu(t, s)$ при фиксированном значении $s = 0$. Соответствующие значения эмпирической функции чувствительности

$$\mu_i^* = \frac{D_i}{\varepsilon^2},$$

где D – эмпирическая дисперсия, полученные прямым численным моделированием случайных траекторий, изображены звездочками.

Как видим, хорошее соответствие эмпирических данных теоретическим кривым позволяет использовать представленную в работе конструкцию функции стохастической чувствительности в описании особенностей распределения случайных траекторий около тороидальной поверхности.

3. Стабилизация

3.1. Стабилизация инвариантных многообразий

Рассмотрим в n -мерном евклидовом пространстве управляемую детерминированную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$dx = f(x, u) dt, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^l \quad (3.1)$$

и соответствующую стохастически возмущенную систему уравнений Ито:

$$dx = f(x, u) dt + \sum_{r=1}^m \sigma_r(x, u) dw_r(t), \quad x, f, \sigma_r \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^l. \quad (3.2)$$

Здесь $f(x, u)$, $\sigma_r(x, u)$ – достаточно гладкие вектор-функции, $w_r(t)$ ($r = 1, \dots, m$) – независимые стандартные винеровские процессы, u – управляющий параметр.

Системой (3.2) охватывается общий случай, когда случайные помехи зависят не только от состояния системы, но и от управляющего воздействия.

Предполагается, что при $u = 0$ система (3.1) имеет гладкое компактное инвариантное многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$. Многообразие M остается при $u = 0$ инвариантным и для системы (3.2), если

$$\sigma_r(x, 0)|_M = 0. \quad (3.3)$$

В данной главе рассматривается задача стабилизации – выбора закона управления u , при котором для системы (3.2) многообразие M является инвариантным и ЭСК-устойчивым (см. определение 1.2).

Стабилизирующий регулятор будем выбирать из класса \mathcal{F} допустимых обратных связей $u = u(x)$, где достаточно гладкая

функция $u(x)$ удовлетворяет условию

$$u(x)|_{\mathcal{M}} = 0. \quad (3.4)$$

Будем считать, что при всех $u \in \mathcal{F}$ окрестность U многообразия \mathcal{M} инвариантна для стохастической системы (3.2).

Условие (3.4) означает, что управления $u \in \mathcal{F}$ никак не влияют на динамику тех решений систем (3.1), (3.2), которые лежат в многообразии \mathcal{M} .

По теореме 1.3 вопрос о стабилизации многообразия \mathcal{M} нелинейной стохастической системы (3.2) сводится к задаче стабилизации системы стохастического линейного расширения.

Для нелинейной системы (3.2) с управлением $u \in \mathcal{F}$ соответствующее линейное расширение имеет вид

$$\begin{aligned} dx &= f(x, u) dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= F(x, u)zdt + \sum_{r=1}^m S_r(x, u)zdw_r(t), & z &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} F(x, u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ S_r(x, u) &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(x, u) + \frac{\partial \sigma_r}{\partial u}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

С учетом свойства (3.4) управлений $u = u(x)$ из \mathcal{F} и условия $x \in \mathcal{M}$, систему (3.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} dx &= f_0(x) dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= (A(x) + B(x)K(x))zdt + \\ &+ \sum_{r=1}^m (C_r(x) + H_r(x)K(x))zdw_r(t), & z &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$f_0(x) = f(x, 0), \quad A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0), \quad B(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0),$$

$$C_r(x) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(x, 0), \quad H_r(x) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial u}(x, 0), \quad K(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x).$$

Замечание 3.1. Рассмотрим характер зависимости системы (3.6) от управления u . Как видим, в систему (3.6) входит, а следовательно, и влияет на ее динамику только производная $K(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$. При этом играет роль выбор значений функции $K(x)$ лишь на многообразии \mathcal{M} . Из (3.4) следует, что

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad \forall z \in T_x \quad K(x)z = 0,$$

откуда вытекает равенство

$$\forall x \in \mathcal{M} \quad K(x)P_x = K(x), \quad (3.7)$$

задающее естественное условие на выбор $K(x)$.

Рассмотрим разложение Тейлора произвольной функции u из \mathcal{F} :

$$u(x) = u(\gamma) + \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma)(x - \gamma) + O(\|x - \gamma\|^3).$$

Положив $\gamma = \gamma(x)$, с учетом (3.4), получим

$$u(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(x))\Delta(x) + O(\|\Delta(x)\|^3).$$

Как следует из замечания 3.1, стабилизирующие возможности управления $u = u(x)$ определяются исключительно его первым приближением – функцией $\frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(x))\Delta(x)$. От слагаемых старших порядков уже ничего не зависит, поэтому, не теряя общности, здесь можно ограничиться классом управлений вида

$$u(x) = K(\gamma(x))\Delta(x). \quad (3.8)$$

Регулятор (3.8) есть обратная связь по отклонению

$$\Delta(x) = x - \gamma(x)$$

состояния x системы (3.2) от многообразия \mathcal{M} . Стабилизирующие свойства этого регулятора определяются выбором $l \times n$ -матричной функции $K(x)$, определенной на \mathcal{M} и удовлетворяющей условию (3.7). Если при некоторой матричной функции $K(x)$ инвариантное многообразие \mathcal{M} замкнутой системы (3.2), (3.8) становится ЭСК-устойчивым, то систему (3.2) будем называть *стабилизируемой*.

Функция $K(x)$ является матрицей обратной связи для регулятора

$$v = K(x)z, \quad (3.9)$$

формирующего по текущему z управляющее воздействие v в системах линейного расширения:

$$\begin{aligned} dx &= f_0(x) dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= (A(x)z + B(x)v)dt, & z &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} dx &= f_0(x) dt, & x &\in \mathcal{M}, \\ dz &= (A(x)z + B(x)v)dt + \\ &+ \sum_{r=1}^m (C_r(x)z + H_r(x)v)dw_r(t), & z &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система (3.10) является линейным расширением для (3.1), а система (3.11) – линейным расширением для (3.2).

По теореме 1.3 вопрос о стабилизируемости нелинейной стохастической системы (3.2) сводится к исследованию стабилизируемости системы (3.11).

Рассмотрим множество \mathbb{K} , состоящее из $l \times n$ -матричных функций $K(x)$, определенных и удовлетворяющих на \mathcal{M} условию (3.7), для которых замкнутая система (3.9), (3.10) является P -устойчивой. Множество \mathbb{K} задает класс регуляторов (3.9), стабилизирующих детерминированную систему (3.10).

Для исследования возможностей стабилизации стохастической системы (3.11) регулятором (3.9) воспользуемся спектральным критерием P -устойчивости (см. теорему 1.4).

Рассмотрим соответствующие операторы

$$\mathcal{A}_K[V] = \left(f_0, \frac{\partial V}{\partial x} \right) + (A + BK)^\top V + V(A + BK),$$

$$\mathcal{S}_K[V] = \sum_{r=1}^m (C_r + H_r K)^\top V (C_r + H_r K),$$

$$\mathcal{P}_K = -\mathcal{A}_K^{-1} \mathcal{S}_K,$$

определенные на пространстве Σ (пространство Σ описано в разделе 1.4). Отметим, что обратный оператор \mathcal{A}_K^{-1} определен при любой матрице $K \in \mathbb{K}$. Из теоремы 1.4 следует

Теорема 3.1. Для стабилизируемости стохастической системы (3.11) управлениями вида (3.9) необходимо и достаточно, чтобы

а) детерминированная система (3.10) была стабилизируема некоторым управлением (3.9) ($\mathbb{K} \neq \emptyset$);

б) выполнялось неравенство $\inf_{K \in \mathbb{K}} \rho(\mathcal{P}_K) < 1$.

При этом стабилизировать систему (3.11) будет любое управление (3.9) с матрицей $K \in \mathbb{K}$, для которой $\rho(\mathcal{P}_K) < 1$.

Как видим, данная теорема сводит исследование стабилизируемости стохастической системы (3.11) к задаче оптимального управления детерминированной системой (3.10) с критерием $\rho(\mathcal{P}_K)$. Представленный критерий является общим вариантом результатов, опубликованных в [105, 106, 107].

Замечание 3.2. В случае многообразия \mathcal{M} с коразмерностью, равной единице ($\text{codim } \mathcal{M} = 1$), из условия (3.7) следует, что $\text{rank} K(x) \leq 1$. Это означает, что в дополнение к факторизации, описанной в замечании 1.6, возможна факторизация матрицы обратной связи:

$$K(x) = k(x)p^\top(x).$$

Здесь $k(x)$ – l -вектор-функция, $p(x)$ – n -вектор-функция, нормированная и ортогональная M в точке $x \in M$. При этом управление (3.8) будет иметь вид

$$u = k(\gamma(x))\delta(x), \quad (3.12)$$

где $\delta(x) = p^\top(\gamma(x))\Delta(x)$ – скалярная функция, задающая расстояние от точки x до многообразия M . Соответственно меняется и форма регулятора (3.9) в системах линейного расширения:

$$v = k(x)p^\top(x)z. \quad (3.13)$$

Как видим, здесь возможный произвол в построении регуляторов (3.12), (3.13) ограничен выбором l скалярных функций – координат вектора $k(x)$.

3.2. Стабилизация точки покоя

Рассмотрим случай, когда инвариантное многообразие M управляемых систем (3.1), (3.2) состоит из единственной точки покоя $\bar{x} : M = \{\bar{x}\}$.

Для замкнутой нелинейной системы (3.2), (3.8) система первого приближения (3.11), (3.9) имеет вид

$$dz = (Az + Bv)dt + \sum_{r=1}^m (C_r z + H_r v)dw_r(t), \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (3.14)$$

$$v = Kz, \quad (3.15)$$

где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0), \quad C_r = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(\bar{x}, 0), \quad H_r = \frac{\partial \sigma_r}{\partial u}(\bar{x}, 0)$$

и K – постоянные матрицы.

Как видим, задача стабилизации точки покоя нелинейной системы (3.2) сводится к стабилизации решения $z = 0$ линейной системы (3.14) с постоянными коэффициентами.

Исследование задачи оптимальной стабилизации стохастических систем было начато в работах Н. Н. Красовского и Э. А. Лидского [56, 73], где впервые было показано, как в стохастическом случае можно получать уравнение Беллмана для оптимальной функции Ляпунова.

Задача оптимального регулирования линейными системами, содержащими мультипликативные шумы, при квадратичном критерии качества на конечном и бесконечном интервале времени рассматривалась в работах А. Б. Куржанского [61], М. Б. Невельсона [91], Р. З. Хасьминского [119], Р. J. McLane [231, 232], J. C. Willems [274, 275, 276], W. M. Wonham [277, 278, 279], Т. Nakamiso, М. Ohshiro [238]. Было показано, что оптимальное стабилизирующее управление находится из решения матричного алгебраического уравнения Риккати, разрешимость которого эквивалентна стабилизируемости рассматриваемой системы. Если стабилизируемость установлена, то можно решить это уравнение с помощью численных методов [214, 215, 278] и получить оптимальное стабилизирующее управление. В детерминированном случае вопрос о стабилизируемости исчерпывается классическим критерием, требующем полной управляемости подпространства неустойчивых состояний.

Исследование вопроса о стабилизируемости стохастических систем было начато в работе Н. Н. Красовского [53] и продолжено геометрическим анализом в [198, 199]. М. Б. Невельсон в [91], опираясь на критерий устойчивости из [92], получил для уравнения n -го порядка эффективный критерий стабилизируемости. Основная идея этой работы состояла в том, что исследование стабилизируемости стохастической системы сводилось к решению некоторой вспомогательной задачи оптимизации для соответствующей детерминированной системы. Эта идея далее использовалась в работах [43, 238, 276].

Как уже отмечалось в главе 1, эффективность критерия

устойчивости [92] связана с возможностью в случае уравнения n -го порядка заменить все действующие параметрические помехи одним шумом второго типа, что приводит к простому критерию стохастической устойчивости (см. теорему 1.5). Этот критерий позволяет получить простое конструктивное решение рассматриваемой здесь задачи стабилизации.

Рассмотрим теперь соответствующую систему с мультипликативными шумами второго типа:

$$dz = (Az + Bv)dt + \sqrt{z^\top Qz + v^\top Rvd\eta}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (3.16)$$

в которой управление формируется обратной связью (3.15). Здесь $\eta(t)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами

$$E d\eta = 0, \quad E d\eta(d\eta)^\top = Gdt,$$

а Q , R и G – постоянные симметрические неотрицательно определенные $n \times n$ -матрицы.

Задача стабилизации системы (3.16) регулятором (3.15) есть задача выбора матрицы K , при которой решение $z = 0$ замкнутой системы (3.15), (3.16) становится ЭСК-устойчивым. В решении этой задачи будем опираться на спектральные критерии теорем 1.3, 1.5 и 3.1.

Рассмотрим множество \mathbb{K} , состоящее из матриц K размера $l \times n$, при которых матрица $A + BK$ замкнутой детерминированной системы

$$dz = (A + BK)zdt$$

является устойчивой. Отметим, что $\mathbb{K} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда пара (A, B) – стабилизируема [113].

Для системы (3.16) с регулятором (3.15) спектральный радиус оператора \mathcal{P}_K имеет следующее представление (см. в разделе 1.2 соотношение (1.68), (1.69))

$$\rho(\mathcal{P}_K) = E(z_s^\top Qz_s + v^\top Rv), \quad (3.17)$$

где z_s – стационарно распределенное решение системы

$$dz = (Az + Bv)dt + d\eta \quad (3.18)$$

с матрицей $K \in \mathbb{K}$ в регуляторе (3.15).

Как видим, исследование стабилизируемости стохастической системы (3.16) с мультипликативным шумом, зависящим от состояния и управления, сводится здесь теоремами 1.5 и 3.1 к классической задаче минимизации квадратичного критерия (3.17) для системы с аддитивным шумом (3.18). Для случая, когда матрицы Q и R – положительно определенные, задача оптимизации

$$\min_{K \in \mathbb{K}} \rho(\mathcal{P}_K) \quad (3.19)$$

имеет [36] единственное решение

$$K_0 = -R^{-1}B^T V, \quad (3.20)$$

где матрица V является решением уравнения Риккати

$$A^T V + V A - V B R^{-1} B^T V = -Q. \quad (3.21)$$

При этом

$$\rho(\mathcal{P}_{K_0}) = \min_{K \in \mathbb{K}} \rho(\mathcal{P}_K) = \text{tr}(VG).$$

Таким образом, здесь, в случае точки покоя, критерий теоремы 3.1 приобретает следующий конструктивный вид.

Теорема 3.2. Для стабилизируемости системы (3.16) регулятором (3.15) необходимо и достаточно, чтобы

- а) пара (A, B) была стабилизируема;
- б) выполнялось неравенство

$$\text{tr}(VG) < 1,$$

где матрица V – решение уравнения (3.21). При этом стабилизировать систему (3.16) будет регулятор (3.15) с матрицей K_0 из (3.20).

Замечание 3.3. Регулятор (3.15) с матрицей K_0 , известный еще в классической детерминированной теории аналитического конструирования регуляторов [72], занимает особое место в классе обратных связей, стабилизирующих систему (3.16). Действительно, рассмотрим множество \mathbb{K}_s всех матриц K , при которых система (3.15), (3.16) является ЭСК-устойчивой. Рассмотрим наряду с (3.16) систему

$$dz = (Az + Bv)dt + \varepsilon \sqrt{z^\top Q z + v^\top R v} d\eta, \quad (3.22)$$

содержащую дополнительный скалярный параметр интенсивности шума $\varepsilon \geq 0$. При каждом $K \in \mathbb{K}_s$ система (3.15), (3.16) имеет некоторый запас устойчивости, что позволяет без потери устойчивости увеличивать интенсивность действующего мультипликативного шума до некоторой критической величины. Для системы (3.22) это критическое (бифуркационное) значение ε_K^* связано (см. замечание 1.3) со спектральным радиусом оператора \mathcal{P}_K соотношением

$$\varepsilon_K^* = \sqrt{1/\rho(\mathcal{P}_K)}.$$

Для фиксированного $K \in \mathbb{K}_s$ замкнутая система (3.15), (3.22) устойчива при всех $\varepsilon < \varepsilon_K^*$ и неустойчива при всех $\varepsilon \geq \varepsilon_K^*$. Здесь, естественно, возникает следующая задача оптимизации: подобрать в множестве \mathbb{K}_s элемент, при котором запас устойчивости системы (3.15), (3.22) будет максимальным. Формально эта задача выглядит следующим образом:

$$\max_{K \in \mathbb{K}_s} \varepsilon_K^*. \quad (3.23)$$

Задачи (3.19) и (3.23) эквивалентны и имеют одинаковое решение – матрицу K_0 . Таким образом, регулятор (3.15) с матрицей K_0 из (3.20) в классе всех возможных стабилизирующих регуляторов \mathbb{K}_s замечателен тем, что обеспечивает для системы максимальный запас устойчивости.

В теории оптимальной стабилизации, даже для традиционно рассматриваемого класса квадратичных критериев качества, существует проблема выбора у них подходящих параметров. Здесь имеется значительный произвол. На практике параметры обычно выбирают, исходя из тех или иных полуинтуитивных соображений. В нашем случае параметры Q и R критерия (3.17) задачи оптимальной стабилизации (3.19) суть параметры мультипликативного шума в системе (3.16).

Матрицы Q и R в системе первого приближения (3.16) могут оказаться вырожденными. В этом случае задача оптимального управления (3.17), (3.18) становится сингулярной [222, 275].

Подобно тому, как это делалось в главе 1 при исследовании устойчивости (см. заключительную часть раздела 1.7), здесь при решении задачи стабилизации систему (3.16) с одним шумом второго типа можно использовать в качестве мажоранты для системы (3.15) с несколькими шумами первого типа. Это позволяет использовать критерий теоремы 3.2 для получения достаточных условий стабилизируемости системы (3.15).

Представленный критерий был опубликован в [107], где использовался при построении стабилизирующих регуляторов в системах с неполной информацией.

3.3. Стабилизация цикла

Рассмотрим случай, когда инвариантным многообразием M системы (3.2) с регулятором (3.8) является предельный цикл, задаваемый T -периодическим решением $x = \xi(t)$.

В этом случае для замкнутой нелинейной системы (3.2), (3.8) соответствующая система первого приближения (3.11) с регулятором (3.9) имеет вид

$$dz = (A(t)z + B(t)v)dt + \sum_{r=1}^m (C_r(t)z + H_r(t)v)dw_r(t), \quad (3.24)$$

$$v = K(t)z. \quad (3.25)$$

Здесь

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), 0), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\xi(t), 0), \quad C_r(t) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(\xi(t), 0),$$

$$H_r(t) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial u}(\xi(t), 0)$$

и $K(t)$ – T -периодические матрицы, при этом условие (3.7) приобретает вид

$$K(t)P(t) \equiv K(t), \quad (3.26)$$

где $P(t) = P_{f(\xi(t))}$.

Рассмотрим теперь соответствующую систему с мультипликативными шумами второго типа:

$$dz = (A(t)z + B(t)v)dt + \sqrt{z^\top Q(t)z + v^\top R(t)v}d\eta, \quad (3.27)$$

где $\eta(t)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами

$$E d\eta(t) = 0, \quad E d\eta(t)(d\eta(t))^\top = G(t)dt,$$

$Q(t)$, $R(t)$ и $G(t)$ – T -периодические неотрицательно определенные матрицы соответствующих размерностей, $Q, G \in \mathcal{K}$.

Рассмотрим детерминированную систему

$$dz = (A(t)z + B(t)v)dt \quad (3.28)$$

и множество \mathcal{K} всех T -периодических матриц $K(t)$ размера $l \times n$ с условием (3.26), при которых система (3.28) с регулятором (3.25) является P -устойчивой. Для системы (3.27) спектральный радиус $\rho_K = \rho(\mathcal{P}_K)$ оператора \mathcal{P}_K из теоремы 3.1 удовлетворяет (см. оценки (1.81)) неравенствам

$$\min_{[0,T]} J_K(t) \leq \rho_K \leq \max_{[0,T]} J_K(t). \quad (3.29)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_K(t) &= E(z^\top(t)Q(t)z(t) + v^\top(t)R(t)v(t)) = \\ &= E(z^\top(t)(Q(t) + K^\top(t)R(t)K(t))z(t)) = \\ &= \text{tr}((Q(t) + K^\top(t)R(t)K(t))D(t)), \end{aligned}$$

$z(t)$ – решение системы

$$dz = (A(t)z + B(t)v)dt + d\eta \quad (3.30)$$

с регулятором (3.25). Это решение соответствует некоторому существующему у системы (3.30) при $K \in \mathbb{K}$ периодическому режиму с матрицей вторых моментов $D(t) = E(z(t)z^\top(t))$.

Оценки (3.29) позволяют, решая соответствующие задачи оптимизации для системы с аддитивными шумами (3.30) и квадратичного критерия J_K , получать как достаточные, так и необходимые условия стабилизируемости.

3.3.1. Случай цикла на плоскости

Рассмотрим систему (3.2) с регулятором (3.8) при $n = 2$. На фазовой плоскости \mathbb{R}^2 коразмерность цикла \mathcal{M} , задаваемого T -периодическим решением $\xi(t)$, равна единице. В этом случае (см. замечание 3.2) регуляторы имеют форму (3.12), (3.13).

Для системы (3.2), (3.12) соответствующая замкнутая система первого приближения (1.83), (3.13), связанная с решением $\xi(t)$, имеет вид

$$dz = F_k(t)zdt + \sqrt{z^\top P(t)z}d\eta_k, \quad (3.31)$$

где

$$F_k(t) = A(t) + B(t)k(t)p^\top(t), \quad P(t) = p(t)p^\top(t), \quad (3.32)$$

$k(t)$ – T -периодическая l -вектор-функция, $p(t)$ – нормированная вектор-функция с условием ортогональности $p(t) \perp f(\xi(t), 0)$, $\eta_k(t)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами

$$\begin{aligned}\eta_k(t) &= \sum_{r=1}^m w_r(t) g_{rk}(t), \quad g_{rk}(t) = C_r(t)p(t) + H_r(t)k(t), \\ G_k(t) &= E d\eta_k(t)(d\eta_k(t))^\top = \sum_{r=1}^m g_{rk}(t) g_{rk}^\top(t).\end{aligned}\quad (3.33)$$

Критерий P -устойчивости (1.92) для системы (3.31) с фиксированным коэффициентом $k(t)$ в обратной связи

$$v = k(t)p^\top(t)z \quad (3.34)$$

имеет вид

$$J_k < 0, \quad (3.35)$$

где

$$J_k = \langle \alpha_k(t) + \beta_k(t) \rangle. \quad (3.36)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ – усреднение по $[0, T]$:

$$\langle \alpha \rangle = \int_0^T \alpha(t) dt,$$

$$\alpha_k(t) = p^\top(t) \left(F_k^\top(t) + F_k(t) \right) p(t), \quad \beta_k(t) = p^\top(t) G_k(t) p(t).$$

Функции $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$, согласно (3.32), (3.33), имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha_k(t) &= p^\top(t) \left(A^\top(t) + A(t) + p(t)k^\top(t)B^\top(t) + \right. \\ &\quad \left. + B(t)k(t)p^\top(t) \right) p(t) = \alpha(t) + 2b^\top(t)k(t), \\ \beta_k(t) &= \sum_{r=1}^m \left[p^\top(t)(C_r(t)p(t) + H_r(t)k(t)) \right]^2 =\end{aligned}$$

$$= \sum_{r=1}^m \left[(p^\top(t) C_r(t) p(t))^2 + 2p^\top(t) C_r(t) p(t) p^\top(t) H_r(t) k(t) + \right. \\ \left. + (p^\top(t) H_r(t) k(t))^2 \right] = \beta(t) + 2c^\top(t) k(t) + k^\top(t) S(t) k(t),$$

где

$$\alpha(t) = p^\top(t) (A^\top(t) + A(t)) p(t), \quad b(t) = B^\top(t) p(t),$$

$$\beta(t) = \sum_{r=1}^m c_r^2(t), \quad c(t) = \sum_{r=1}^m c_r(t) h_r(t), \quad H(t) = \sum_{r=1}^m h_r(t) h_r^\top(t),$$

$$c_r(t) = (p^\top(t) C_r(t) p(t))^2, \quad h_r(t) = H_r^\top(t) p(t).$$

В результате для функционала J_k из (3.36) получаем явную формулу

$$J_k = \langle \alpha(t) + \beta(t) + 2(b(t) + c(t))^\top k(t) + k^\top(t) H(t) k(t) \rangle, \quad (3.37)$$

позволяющую, решая неравенство (3.35), проводить конструктивный выбор коэффициента $k(t)$ регулятора (3.34), стабилизирующего систему (3.31).

Пример. Анализ функционала J_k в задаче стабилизации

Рассмотрим сначала случай, когда в исходной системе (3.2) шумы не зависят от управления. Это означает, что в (3.33) матричная функция $H_r(t) \equiv 0$ и, как следствие, $c(t) \equiv 0$, $H(t) \equiv 0$,

$$J_k = \langle \alpha(t) + \beta(t) + 2b(t)^\top k(t) \rangle.$$

В этом случае легко доказать, что для стабилизируемости системы (3.31) при любых шумах (при любом β) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $b(t)$ не была на отрезке $[0, T]$ тождественно равна нулю:

$$b(t) \not\equiv 0. \quad (3.38)$$

Действительно, назначив для J_k в соответствии с критерием P -устойчивости любое отрицательное значение $J_k = -\mu$, $\mu > 0$, получим уравнение

$$J_k = \langle \alpha(t) + \beta(t) + 2b(t)^T k(t) \rangle = -\mu. \quad (3.39)$$

Невырожденность (3.38) вектор-функции $b(t)$ является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (3.39) при любых α , β и μ . В условиях (3.38) уравнение (3.39) имеет бесконечное множество решений. Естественный здесь дополнительный критерий

$$\|k(t)\|^2 = \langle k^T k \rangle \rightarrow \min$$

приводит к единственному решению

$$k_0(t) = -\frac{\alpha(t) + \beta(t) + \frac{1}{T}\mu}{2 \langle b(t)^T b(t) \rangle} b(t) \quad (3.40)$$

с наименьшей нормой. Прямой подстановкой легко проверить равенство $J_{k_0} = -\mu$, означающее, что регулятор (3.34) с коэффициентом обратной связи (3.40) стабилизирует систему (3.31).

В общем случае, когда шумы в исходной системе (3.2) зависят от управления, матричная функция $H(t)$, входящая в (3.37), отлична от нуля. При этом неравенство (3.35) может и не иметь решений. Полное исследование связано с анализом задачи минимизации квадратичного функционала (3.37).

Проиллюстрируем решение этой задачи для случая скалярного управления ($l = 1$). При $l = 1$ функции $b(t)$, $c(t)$, $H(t)$ и $k(t)$ также являются скалярными, а функционал (3.37) имеет вид

$$J_k = \langle \alpha(t) + \beta(t) + 2(b(t) + c(t))k(t) + H(t)k^2(t) \rangle.$$

Пусть $H(t) \neq 0$ на $[0, T]$. Выделяя полный квадрат, получим

$$J_k = \langle H(t) \left(k(t) + \frac{b(t) + c(t)}{H(t)} \right)^2 - \frac{(b(t) + c(t))^2}{H(t)} + \alpha(t) + \beta(t) \rangle.$$

Очевидно, для

$$\begin{aligned} k_0(t) &= -\frac{b(t) + c(t)}{H(t)}, \\ J_{k_0} &= \langle \alpha(t) + \beta(t) - \frac{(b(t) + c(t))^2}{H(t)} \rangle > \end{aligned} \quad (3.41)$$

при всех $k(t)$ справедливо неравенство

$$J_{k_0} \leq J_k.$$

В результате получаем следующий критерий. Неравенство

$$\langle \alpha(t) + \beta(t) \rangle < \langle \frac{(b(t) + c(t))^2}{H(t)} \rangle \quad (3.42)$$

является необходимым и достаточным условием стабилизируемости системы (3.31) регулятором (3.34).

Если неравенство (3.42) выполняется, то регулятор (3.34) с коэффициентом $k_0(t)$ из (3.41) является стабилизирующим.

3.4. Стабилизация 2-тора

Задача стабилизации тора для детерминированных систем рассматривалась в [109].

Рассмотрим здесь сразу случай, когда инвариантным многообразием M системы (3.2) с регулятором (3.8) является лежащая в \mathbb{R}^3 двумерная тороидальная поверхность (2-тор).

Здесь, так же, как и в разделе 1.9, будем использовать параметризацию M , связанную с решениями $x(t, s)$ детерминированной системы (3.1) при $u = 0$. В трехмерном пространстве коразмерность 2-тора равна единице. В этом случае (см. замечание 3.2) регуляторы имеют форму (3.12), (3.13). Для системы (3.2), (3.13) соответствующая система первого приближения (1.106) с регулятором (3.13)

$$v = k(t, s)p^\top(t, s)z \quad (3.43)$$

имеет вид

$$dz = F_k(t, s)zdt + \sqrt{z^\top P(t, s)z}d\eta_k, \quad (3.44)$$

где

$$\begin{aligned} F_k(t, s) &= A(t, s) + B(t, s)k(t, s)p^\top(t, s), \\ P(t, s) &= p(t, s)p^\top(t, s), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$k(t, s)$ – l -вектор-функция, $p(t, s)$ – нормированная вектор-функция, ортогональная $y(t, s)$ и $z(t, s)$ из (1.93), $\eta_k(t, s)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами:

$$\begin{aligned} \eta_k(t, s) &= \sum_{r=1}^m w_r(t)g_{rk}(t, s), \\ g_{rk}(t, s) &= C_r(t, s)p(t, s) + H_r(t, s)k(t, s), \\ G_k(t, s) &= E d\eta_k(t, s)(d\eta_k(t, s))^\top = \\ &= \sum_{r=1}^m g_{rk}(t, s)g_{rk}^\top(t, s). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Здесь в (3.45), (3.46)

$$\begin{aligned} A(t, s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, s), 0), \quad B(t, s) = \frac{\partial f}{\partial u}(x(t, s), 0), \\ C_r(t, s) &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}(x(t, s), 0), \quad H_r(t, s) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial u}(x(t, s), 0). \end{aligned}$$

Критерий (1.109) P -устойчивости замкнутой системы (3.44) с фиксированным коэффициентом $k(t, s)$ в регуляторе (3.43) имеет вид

$$\max_s J_k(s) < 0, \quad (3.47)$$

где

$$J_k(s) = \langle \alpha_k(t, s) + \beta_k(t, s) \rangle. \quad (3.48)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ – усреднение по t :

$$\langle \alpha(t, s) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \alpha(t, s) dt,$$

$$\alpha_k(t, s) = p^\top(t, s) \left(F_k^\top(t, s) + F_k(t, s) \right) p(t, s),$$

$$\beta_k(t, s) = p^\top(t, s) G_k(t, s) p(t, s).$$

Функции $\alpha_k(t, s)$, $\beta_k(t, s)$ согласно (3.45), (3.46) имеют вид (зависимость всех функций от (t, s) опущена):

$$\alpha_k = p^\top \left(A^\top + A + p k^\top B^\top + B k p^\top \right) p = \alpha + 2b^\top k,$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \sum_{r=1}^m \left[p^\top (C_r p + H_r k) \right]^2 = \\ &= \sum_{r=1}^m \left[(p^\top C_r p)^2 + 2p^\top C_r p p^\top H_r k + (p^\top H_r k)^2 \right] = \\ &= \beta + 2c^\top k + k^\top S k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= p^\top \left(A^\top + A \right) p, \quad b = B^\top p, \\ \beta &= \sum_{r=1}^m c_r^2, \quad c = \sum_{r=1}^m c_r h_r, \quad H = \sum_{r=1}^m h_r h_r^\top, \\ c_r &= \left(p^\top C_r p \right)^2, \quad h_r = H_r^\top p. \end{aligned}$$

В результате для функционала $J_k(s)$ из (3.48) справедлива явная формула

$$\begin{aligned} J_k(s) &= < \alpha(t, s) + \beta(t, s) + 2(b(t, s) + \\ &+ c(t, s))^\top k(t, s) + k^\top(t, s) H(t, s) k(t, s) >, \end{aligned} \quad (3.49)$$

позволяющая при решении неравенства (3.47) проводить конструктивный анализ задачи стабилизации системы (3.44) подобно тому, как это сделано в случае цикла.

3.5. Стабилизация линейных стохастических систем с периодическими коэффициентами

Рассмотрим линейную систему с мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управления:

$$dx = (A(t)x + B(t)u) dt + \sum_{r=1}^m (\sigma_r(t)x + \psi_r(t)u) dw_r. \quad (3.50)$$

Здесь x – n -мерный вектор состояния, u – l -мерный вектор управления, w_r ($r = 1, \dots, m$) – некоррелированные стандартные винеровские процессы, $A(t), \sigma_r(t)$ – T -периодические $n \times n$ -матрицы, $B(t), \psi_r(t)$ – T -периодические $n \times l$ -матрицы.

Пусть управление в (3.50) формируется обратной связью

$$u = K(t)x, \quad (3.51)$$

где $K(t)$ – T -периодическая $l \times n$ -матричная функция.

Регулятор (3.51) будем называть *стабилизирующим* для системы (3.50), если замкнутая система (3.50), (3.51) является устойчивой (см. определение 1.11).

Рассмотрим множество матриц

$$\mathbb{K} = \{K(t) \mid \text{система (3.50), (3.51) устойчива}\},$$

при которых регулятор (3.51) является стабилизирующим.

В случае $\mathbb{K} \neq \emptyset$ система (3.50) называется *стабилизируемой*.

Рассмотрим для системы (3.50) задачу оптимальной стабилизации с квадратичным критерием:

$$J[u, s, x] = E \int_s^\infty (x^\top Q x + u^\top P u) dt.$$

Здесь $Q \in \mathcal{K}_1^n, P \in \mathcal{K}_1^l$ (\mathcal{K}_1^n определено в разделе 1.10), $x(t) = x(t, s, x)$ есть решение системы (3.50) с начальным условием $x(s) = x$, при управлении, формируемом обратной связью (3.51), где $K(t) \in \mathbb{K}$.

В детерминированном случае задача оптимальной стабилизации линейной системы с периодическими коэффициентами исследовалась многими авторами (см., например, [125, 209]). Аналогичная задача для стохастических систем с постоянными коэффициентами изучалась в [119, 279].

Решением задачи

$$J[u, s, x] \rightarrow \min_{K(t) \in \mathbb{K}}$$

для системы (3.50) является оптимальный регулятор

$$u_0 = K_0(t)x, \quad (3.52)$$

где

$$K_0(t) = -(P + \sum_{r=1}^m \psi_r^\top R \psi_r)^{-1} (B^\top R + \sum_{r=1}^m \psi_r^\top R \sigma_r). \quad (3.53)$$

Здесь $R \in \mathcal{K}_1^n$ – единственная матрица, которая удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{R} + RA^\top + RA + \sum_{r=1}^m \sigma_r^\top R \sigma_r - (RB + \sum_{r=1}^m \sigma_r^\top R \psi_r)(P + \\ + \sum_{r=1}^m \psi_r^\top R \psi_r)^{-1} (B^\top R + \sum_{r=1}^m \psi_r^\top R \sigma_r) = -Q. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Оптимальность регулятора (3.52) следует из представления квадратичного критерия

$$J[u, s, x] = J[u_0, s, x] + E \int_s^\infty (u - u_0)^\top (P + \sum_{r=1}^m \psi_r^\top R \psi_r) (u - u_0) dt$$

$$J[u_0, s, x] = x^\top R(s)x,$$

справедливого при любом $K(t) \in \mathbb{K}$.

Замечание 3.4. Матрица обратной связи $K_0(t)$ оптимального регулятора (3.52), (3.53) не зависит от начального момента s . В результате построение оптимального стабилизирующего регулятора сводится к отысканию T -периодического решения матричного уравнения (3.54). Для решения уравнения (3.54) можно предложить численные методы, подобные алгоритмам из раздела 10 главы 1. Стабилизируемость системы (3.50) является необходимым условием сходимости таких алгоритмов.

Для решения задачи стабилизируемости воспользуемся спектральной теорией устойчивости (см. теорему 1.7 и теорему 1.8).

Систему (3.50) с управлением (3.51) перепишем в виде

$$dx = A(K, t)x dt + \sum_{r=1}^m \sigma_r(K, t)x dw_r,$$

где

$$A(K, t) = A(t) + B(t)K(t), \quad \sigma_r(K, t) = \sigma_r(t) + \psi_r(t)K(t).$$

Рассмотрим операторы $\mathcal{A}_K, \mathcal{S}_K$, заданные соотношениями

$$\mathcal{A}_K[V] = \dot{V} + A^\top(K, t)V + VA(K, t),$$

$$\mathcal{S}_K[V] = \sum_{r=1}^m \sigma_r^\top(K, t)V\sigma_r(K, t).$$

Пусть детерминированная система

$$dx = A(K, t)x dt \tag{3.55}$$

является стабилизируемой

$$\mathbb{K}_0 = \{K(t) \mid \text{система (3.55) устойчива}\} \neq \emptyset.$$

Для каждого элемента $K \in \mathbb{K}_0$ существуют операторы \mathcal{A}_K^{-1} и $\mathcal{P}_K = -\mathcal{A}_K^{-1} \mathcal{S}_K$. Из теоремы 1.7 вытекает следующий критерий.

Теорема 3.3. Система (3.50) стабилизируема тогда и только тогда, когда

- а) система (3.55) стабилизируема ($\mathbb{K}_0 \neq \emptyset$);
- б) выполняется неравенство

$$\inf_{K \in \mathbb{K}_0} \rho(\mathcal{P}_K) < 1.$$

Стабилизация системы с одним шумом

Рассмотрим стохастическую систему

$$dx = (A(t)x + B(t)u) dt + \sqrt{x^\top Q(t)x + u^\top P(t)u} d\eta \quad (3.56)$$

с обратной связью

$$u = K(t)x. \quad (3.57)$$

Здесь $\eta(t)$ – n -мерный винеровский процесс с параметрами

$$E d\eta(t) = 0, E d\eta(t) d\eta^\top(t) = G(t)dt, Q \in \mathcal{K}_1^n, G \in \mathcal{K}_1^n, P \in \mathcal{K}_1^l.$$

Будем считать, что соответствующая детерминированная система (3.55) стабилизируема ($\mathbb{K}_0 \neq \emptyset$). Для системы (3.56) справедливы соотношения (см. раздел 10 главы 1):

$$\mathcal{S}_K[V] = \text{tr}(VG)(Q + K^\top PK),$$

$$\mathcal{B}_K[\varphi] = -\text{tr}(\mathcal{A}_K^{-1}[\varphi(Q + K^\top PK)]G),$$

$$\rho_K = \rho(\mathcal{P}_K) = \rho(\mathcal{B}_K) = \min_{\vartheta \in \Theta} \max_{[0,T]} I[K, \vartheta, s] = \max_{\vartheta \in \Theta} \min_{[0,T]} I[K, \vartheta, s],$$

$$\min_{[0,T]} I[K, \vartheta, s] \leq \rho_K \leq \max_{[0,T]} I[K, \vartheta, s].$$

Здесь (см. (1.138)):

$$I[K, \vartheta, s] = E \int_s^\infty z^\top(t)(Q(t) + K^\top(t)P(t)K(t))z(t)dt,$$

где $z(t)$ – решение уравнения

$$dz = (A(t) + B(t)K(t) + \vartheta(t))zdt, \quad Ez(s)z^\top(s) = G(s).$$

Из замечания 3.4 следует, что

$$\min_{K \in \mathbf{K}_0} \max_{[0, T]} I[K, \vartheta, s] = \max_{[0, T]} \min_{K \in \mathbf{K}_0} I[K, \vartheta, s].$$

Это означает, что для $\rho = \inf_{K \in \mathbf{K}_0} \rho_K$ справедливы соотношения

$$\min_{[0, T]} \min_{K \in \mathbf{K}_0} I[K, \vartheta, s] \leq \rho \leq \max_{[0, T]} \min_{K \in \mathbf{K}_0} I[K, \vartheta, s],$$

$$\rho = \min_{\vartheta \in \Theta} \min_{[0, T]} \min_{K \in \mathbf{K}_0} I[K, \vartheta, s] = \max_{\vartheta \in \Theta} \max_{[0, T]} \min_{K \in \mathbf{K}_0} I[K, \vartheta, s].$$

Для каждого $\vartheta \in \Theta$ и $s \in [0, 1]$ задача оптимизации

$$I[K, \vartheta, s] \rightarrow \min_{K \in \mathbf{K}_0}$$

имеет решение

$$K_0(t) = -P^{-1}(t)B^\top(t)R(t),$$

где T -периодическая матрица $R(t) = R(\vartheta, t)$ является решением уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \dot{R} + (A(t) + \vartheta(t)I)^\top R + R(A(t) + \\ + \vartheta(t)I) - RB^\top(t)P^{-1}(t)B(t)R = -Q(t). \end{aligned} \quad (3.58)$$

При этом для оптимального значения квадратичного критерия справедливо следующее представление:

$$J[\vartheta, s] = \min_{K \in \mathbf{K}_0} I[K, \vartheta, s] = \text{tr}(R(\vartheta, s)G(s)). \quad (3.59)$$

В результате для системы (3.56) справедлив следующий критерий.

Теорема 3.4. Система (3.56) стабилизируема тогда и только тогда, когда

- а) система (3.55) стабилизируема ($\mathbb{K}_0 \neq \emptyset$);
- б) выполняется неравенство

$$\min_{\vartheta \in \Theta} \max_{[0, T]} J[\vartheta, s] < 1.$$

Если при некотором $\vartheta \in \Theta$ выполняется неравенство

$$\max_{[0, T]} J[\vartheta, s] < 1,$$

то регулятор $u(t) = -P^{-1}(t)B^\top(t)R(\vartheta, t)x(t)$ будет стабилизировать систему (3.56).

П р и м е р

Рассмотрим одномерную систему

$$dx = (a(t)x + b(t)u) dt + \sqrt{q(t)x^2 + p(t)u^2} d\eta \quad (3.60)$$

с T -периодическими коэффициентами. Здесь

$$q(t) > 0, \quad p(t) > 0, \quad E(d\eta)^2 = dt.$$

Управление формируется регулятором

$$u(t) = k(t)x(t).$$

Из (3.58), (3.59) следует, что $J[\vartheta, s] = r(s)$, где $r(t)$ является T -периодическим уравнением Риккати:

$$\dot{r} + 2(a(t) + \vartheta(t))r - \frac{b^2(t)r^2}{p(t)} = -q(t).$$

Значение $\rho = \inf_{k \in \mathbb{K}_0} \rho(\mathcal{P}_k)$ при некотором $\bar{\vartheta}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$2(a(t) + \bar{\vartheta}(t))\rho - \frac{b^2(t)\rho^2}{p(t)} = -q(t).$$

После интегрирования получаем квадратное уравнение

$$\alpha\rho^2 - 2\beta\rho - \gamma = 0$$

с постоянными коэффициентами

$$\alpha = \int_0^T \frac{b^2(t)}{p(t)} dt, \quad \beta = \int_0^T a(t) dt, \quad \gamma = \int_0^T q(t) dt.$$

В результате получаем

$$\rho = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha\gamma}}{\alpha}.$$

Неравенство $\rho < 1$ эквивалентно неравенству

$$\int_0^T (2a(t) + q(t)) dt < \int_0^T \frac{b^2(t)}{p(t)} dt. \quad (3.61)$$

Это неравенство является необходимым и достаточным условием стабилизируемости системы (3.60). В условиях (3.61) управление

$$u_0(t) = -\rho \frac{b(t)}{p(t)} x(t)$$

стабилизирует систему (3.60).

Список использованных источников

1. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М. : Наука, 1987.
2. *Акуленко Л. Д.* Гашение колебаний системы, содержащей неуравновешенный ротор // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 110–118.
3. *Алексеев В. В., Лоскутов А. Ю.* Управление системой со странным аттрактором посредством периодического параметрического воздействия // ДАН СССР. 1987. Т. 293, № 6. С. 1346–1348.
4. Анализ и управление нелинейными колебательными системами / под. ред. Г. А. Леонова, А. Л. Фрадкова. СПб. : Наука, 1998.
5. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Управление хаосом: Методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 3–45.
6. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Управление хаосом: Методы и приложения. II. Приложения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4. С. 3–40.
7. *Андронов А. А., Витт А. А.* Об устойчивости по Ляпунову // ЖЭТФ. 1933. Т. 2, вып. 5. С. 373.
8. *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1, 2. Изд-во Сарат. ун-та, 1985.
9. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Окрокверцтов Г. А., Стрелкова Г. И.* Статистические свойства динамического хаоса // Успехи физ. наук. 2005. Т. 175, вып. 2. С. 163–179.
10. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б. и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск : И-т компьют. исслед., 2003.
11. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. М. : Мир, 1971.

12. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978.

13. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М. : Высш. шк., 1989.

14. *Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 5. С. 19–27.

15. *Башкирцева И. А., Исакова М. Г., Ряшко Л. Б.* Асимптотическое разложение квазипотенциала для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 10. С. 1319–1324.

16. *Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б.* Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 6. С. 104–114.

17. *Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б., Стихин П. В.* Стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера при переходе к хаосу // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 32–47.

18. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М. : Мир, 1991.

19. *Бернштейн С. Н.* Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений // Тр. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 95–124.

20. *Бланк М. Л.* Малые возмущения хаотических динамических систем // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, вып. 6(270). С. 3–28.

21. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. : Физматгиз, 1963.

22. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М. : Наука, 1979.
23. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы. Кишинев : Штиинца, 1984.
24. *Бронштейн И. У., Черный В. Ф.* Линейные расширения динамических систем // Топологические структуры и алгебраические системы : мат. исслед. Вып. 44. С. 42–48. Кишинев : Штиинца, 1984.
25. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М. : Наука, 1986.
26. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М. : Наука, 1979.
27. *Веретенников А. Ю.* О больших отклонениях в принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений на торе // Тр. Мат. ин-та им. Стеклова. 1993. Т. 202. С. 33–41.
28. *Воротников В. И., Румянцев В. В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: Теория, методы и приложения. М. : Науч. мир, 2001.
29. *Гизман И. И.* Об одной схеме образования случайных процессов // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58, № 6. С. 961–964.
30. *Гизман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статистические выводы, Ташкент : ФАН, 1966. С. 14–45.
31. *Гизман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев : Наук. думка, 1967.
32. *Губкин А. А., Ряшко Л. Б.* Итерационный метод анализа стохастической устойчивости линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2005. № 2. С. 105–121.
33. *Гузенко П. Ю.* Дискретное управление непрерывными

хаотическими системами // Анализ и управление нелинейными колебательными системами / под. ред. Г. А. Леонова, А. Л. Фрадкова. СПб. : Наука, 1998. С. 53–84.

34. Гуртовник А. С., Неймарк Ю. И. К вопросу об устойчивости квазипериодических движений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 5. С. 824–832.

35. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967.

36. Дэвис М. Х. А. Линейное оценивание и стохастическое управление. М. : Наука, 1984.

37. Диментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М. : Наука, 1980.

38. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М. : Изд-во иностр. лит., 1956.

39. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М. : Наука, 1986.

40. Зубов В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л. : Судпромгиз, 1962.

41. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. М. : Наука, 1984.

42. Ито К. Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов // Математика : сб. пер. 1959. Т. 3, № 5. С. 131–141.

43. Казаринов Ю. Ф. О стабилизации линейной стохастической системы, испытывающей параметрическое воздействие типа белый шум // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 2. С. 245–250.

44. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург : Изд-во УрГАПС, 1998.

45. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со

случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5. С. 809–823.

46. *Ковалева А. С.* Оптимальное управление колебаниями виброударных систем. М. : Наука, 1990.

47. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Изд-во иностр. лит., 1958.

48. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф.* Существование и устойчивость релаксационного тора // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, вып. 3(365). С. 161–162.

49. *Колесов А. Ю.* О существовании и устойчивости двумерного релаксационного тора // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 6. С. 40–47.

50. *Копейкин А. С., Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С.* Особенности процесса установления вероятностной меры на хаотических аттракторах в системах Лоренца и Ресслера с учетом флуктуаций // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С. 65.

51. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. М. : Наука, 1985.

52. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959.

53. *Красовский Н. Н.* О стабилизации систем, в которых помеха зависит от величины управляющего воздействия // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1965. № 2. С. 102–107.

54. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение к книге И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения». М. : Наука, 1966.

55. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. : Наука, 1968.

56. *Красовский Н. Н., Лидский Э. А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами

ми. I–III // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, № 9–11. С. 1145–1150, 1273–1278, 1425–1431.

57. *Крутько П. Д.* Управление колебаниями. Синтез алгоритмов на основе обращения прямого метода Ляпунова // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 2. С. 24–41.

58. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М. : Наука, 1977.

59. *Кузнецов А. П., Капустина Ю. В.* Свойства скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С. 78.

60. *Кузнецов Д. Ф.* Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СПб. : Наука, 1999.

61. *Куржанский А. Б.* Об аналитическом конструировании регулятора в системе с помехой зависящей от управления // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1, вып. 2. С. 204–213.

62. *Кушнер Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М. : Мир, 1969.

63. *Ланда П. С., Стратонович Р. Л.* Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением // Радиофизика. 1959. Т. 2, № 1. С. 37–44.

64. *Ланжевен П.* Избранные труды. М. : Изд-во АН СССР, 1960.

65. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. М. : Наука, 1972.

66. *Левит М. В., Якубович В. А.* Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа белый шум // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 142–148.

67. *Левит М. В.* Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействи-

ем коррелированных белых шумов // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 3. С. 546–551.

68. *Левит М. В.* Устойчивость линейных многомерных стохастических систем с белым шумом // Автоматика и телемеханика. 1977. № 10. С. 38–50.

69. *Леонов Г. А.* Введение в теорию управления. СПб. : Изд-во СПбГУ, 2004.

70. *Леонов Г. А.* О локализации аттракторов уравнения Льенара // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 3. С. 396–401.

71. *Леонов Г. А., Смирнова В. В.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб. : Наука, 2000.

72. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665; № 10. С. 436–441.

73. *Лидский Э. А.* О стабилизации стохастических систем // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, № 5. С. 824–835.

74. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов // Тр. мат. ин-та им. Стеклова АН СССР. 1968. Т. 104. С. 135–180.

75. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М. : Наука, 1974.

76. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. М. : Наука, 1986.

77. *Лоскутов А. Ю., Рыбалко С. Д., Акиншин Л. Г.* Управление динамическими системами и подавление хаоса // Дифференциальные уравнения. 1998. № 8. С. 1143–1144.

78. *Лоскутов А. Ю.* Проблемы нелинейной динамики. II. Подавление хаоса и управление динамическими системами // Вестн. МГУ. 2001. № 2. С. 3–21.

79. *Магницкий Н. А.* О стабилизации неподвижных точек

хаотических отображений // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 2. С. 175–177.

80. *Магницкий Н. А.* О стабилизации неподвижных точек хаотических динамических систем // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 610–612.

81. *Магницкий Н. А.* О стабилизации неустойчивых циклов хаотических отображений // Докл. РАН. 1997. Т. 355, № 6. С. 747–749.

82. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Управление хаосом в нелинейных динамических системах // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 11. С. 1501–1509.

83. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* О переходе к хаосу в нелинейных динамических системах через субгармонический каскад бифуркаций двумерных торов // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 12. С. 1606–1610.

84. *Малатов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М. : Наука, 1968.

85. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М. : Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1956.

86. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966.

87. *Мильштейн Г. Н.* Устойчивость и стабилизация периодических движений автономных систем // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 4. С. 744–749.

88. *Мильштейн Г. Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск : Изд-во Урал. ун-та. 1988.

89. *Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б.* Устойчивость и стабилизация орбит автономных систем при случайных возмущениях // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, № 6. С. 951–958.

90. *Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б.* Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случай-

ными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 1. С. 53–63.

91. *Невельсон М. Б.* Критерий существования линейного оптимального управления для одного класса линейных стохастических систем // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 3. С. 573–577.

92. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Об устойчивости линейной системы при случайных возмущениях ее параметров // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 2. С. 404–409.

93. *Нейман А. Б.* Применение кумулянтного анализа для исследования бифуркаций динамических систем, возмущаемых внешним шумом // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 8.

94. *Неймарк Ю. И.* Интегральные многообразия дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 3. С. 321–334.

95. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. М. : Наука, 1987.

96. *Немыцкий В. В.* О некоторых методах качественного исследования «в большом» многомерных автономных систем // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 455–482.

97. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М. : Мир, 1977.

98. *Острем К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М. : Мир, 1973.

99. *Осипенко Г. С.* Поведение решений дифференциальных уравнений вблизи инвариантных многообразий // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 2. С. 262–271.

100. *Осипенко Г. С.* Возмущение динамических систем вблизи инвариантных многообразий // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 4. С. 620–628.

101. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. М. : Мир, 2003.
102. *Пакшин П. В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М. : Наука, 1994.
103. *Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165–180.
104. *Рытов С. М.* Введение в стохастическую радиофизику. М. : Наука, 1976.
105. *Ряшко Л. Б.* Стабилизация линейных стохастических систем с возмущениями, зависящими от состояния и управления // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 4. С. 612–620.
106. *Ряшко Л. Б.* Линейный фильтр в задаче стабилизации линейных стохастических систем при неполной информации // Автоматика и телемеханика. 1979. № 7. С. 80–89.
107. *Ряшко Л. Б.* Стабилизация линейных систем с мультипликативными шумами при неполной информации // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 5. С. 778–786.
108. *Ряшко Л. Б.* Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 582.
109. *Ряшко Л. Б.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости и стабилизации двумерного инвариантного тора // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 4, 5. С. 140–153.
110. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М. : Наука, 1987.
111. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М. : Сов. радио, 1961.
112. *Стратонович Р. Л.* Новая форма записи стохастиче-

ских интегралов и уравнений // Вестн. МГУ. 1964. Сер. 1, № 1. С. 3–12.

113. Уонэм У. М. Линейные многомерные системы управления. М. : Наука, 1980.

114. Управление мехатронными вибрационными установками / под. ред. И. И. Блехмана, А. Л. Фрадкова. СПб. : Наука, 2001.

115. Управление в физико-технических системах / под. ред. А. Л. Фрадкова. СПб. : Наука, 2004.

116. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М. : Мир, 1978.

117. Фрадков А. Л. Кибернетическая физика. СПб. : Наука, 2003.

118. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир, 1970.

119. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М. : Наука, 1969.

120. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений. Рига : Зинатне, 1989.

121. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М. : Наука, 1978.

122. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов В. Н. Управление колебаниями. М. : Наука, 1980.

123. Эйнштейн А., Смолуховский М. Брауновское движение. М. ; Л. : ОНТИ, 1936.

124. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М. : Наука, 1972.

125. Якубович В. А. Линейно-квадратичная задача оптимизации и частотная теорема для периодических систем // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 4. С. 181–200.

126. *Ali F., Menzinger M.* On the local stability of limit cycles // *Chaos*. 1999. Vol. 9. P. 348–356.
127. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Okrokvertskhov G. A., Strelkova G. I.* Correlation analysis of dynamical chaos // *Physica A*. 2003. Vol. 325. P. 199–212.
128. *Anosov D. V., Aranson S. K., Bronshtein I. U., Grinez V. Z.* Smooth dynamical systems // *Dynamical Systems I: Encycl. Math. Sci.* Berlin : Springer, 1988. Vol. 1. P. 149–233.
129. *Arecchi F. T., Boccaletti S., Ciofini M. et al.* The control of chaos: Theoretical schemes and experimental realizations // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1998. Vol. 8. P. 1643–1655.
130. *Arnaudon M., Thalmaier A.* Stability of stochastic differential equations in manifolds // *Seminaire de Probabilites, XXXII*, 188–214, *Lecture Notes in Math.* Berlin : Springer, 1998. Vol. 1686.
131. *Arneodo A., Coullet P. H., Spiegel E. A.* Cascade of period doublings of tori // *Physics Letters A*. 1983. Vol. 94, N. 1. P. 1–6.
132. *Arnold L.* *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. N. Y. : Wiley, 1974.
133. *Arnold L.* *Random Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1998.
134. *Arnold L., Bleckert G., Schenk-Hoppe K.* The stochastic Brusselator: parametric noise destroys Hopf bifurcation // *Stochastic dynamics* 1997, Bremen. N. Y. : Springer, 1999. P. 71–92.
135. *Arnold L., Crauel H., Eckmann J.-P.* (eds.). *Lyapunov exponents* // *Proc., Oberwolfach*, 1990. *Lecture Notes in Math.* Berlin : Springer, 1991. Vol. 1486.
136. *Arnold L., Khasminskii R. Z.* Stability index for nonlinear stochastic differential equations // *Proc. of Symposia in Pure Math.* 1995. Vol. 57. P. 543–551.
137. *Arnold L., Oeljeklaus E., Pardoux E.* Almost sure and moment stability for linear Ito equations // *Lyapunov*

exponents (L. Arnold and V. Wihstutz, eds.), Lecture Notes in Math. Berlin : Springer, 1986. Vol. 1186. P. 129–159.

138. *Arnold L., Wihstutz V.* (eds.). Lyapunov exponents // Proc., Bremen, 1984. Lecture Notes in Math. Berlin : Springer, 1986. Vol. 1186.

139. *Bacciotti A., Mazzi L.* Stabilizability of closed orbits // Systems Control Letters. 1995. Vol. 24. P. 97–101.

140. *Baggett J. S., Driscoll T. A., Trefethen L. N.* A mostly linear model of transition to turbulence // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7. P. 833.

141. *Baggett J. S., Trefethen L. N.* Low-dimensional models of subcritical transition to turbulence // Phys. Fluids. 1997. Vol. 9. P. 1043.

142. *Baras F.* Stochastic analysis of limit cycle behavior // Stochastic dynamics. Lecture notes in physics. Springer-Verlag, 1997. Vol. 484. P. 167–178.

143. *Bashkirtseva I. A., Isakova M. G., Ryashko L. B.* Quasi-potential in stochastic stability analysis of the nonlinear oscillator orbits // J. Neural, Parallel & Scientific Computations. 1999. Vol. 7, N 3. P. 299–310.

144. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // Phys. A. 2000. Vol. 278. P. 126–139.

145. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // Dynamic Systems and Applications. 2002. Vol. 11. P. 293–309.

146. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Mathematics and Computers in Simulation. 2004. Vol. 66. P. 55–67.

147. *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Sensitivity and chaos control

for the forced nonlinear oscillations // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2005. Vol. 26. P. 1437–1451.

148. *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Constructive Analysis of Noise-Induced Transitions for Coexisting Periodic Attractors of Lorenz Model // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 79. P. 041106–041115.

149. *Bassam B., Dahleh M.* Energy amplification in channel flows with stochastic excitation // *Phys. Fluids*. 2001. Vol. 13. P. 3258.

150. *Basso M., Genesio R., Tesi A.* Stabilizing periodic orbits of forced systems via generalized Piragas controllers // *IEEE Trans. Circ. Syst. - I*. 1997. Vol. 44. P. 1023–1027.

151. *Baxendale P.* Moment stability and large deviations for linear stochastic differential equations // *Proc. Taniguchi Symp. on Probab. Meth. in Math. Physics, Katata and Kyoto*. 1985. (N. Ikeda, ed.). Kinokuniya, Tokyo. 1987. P. 31–54.

152. *Baxendale P. H.* Stability and equilibrium properties of stochastic flows of diffeomorphisms // *Diffusion Processes and Related Problems in Analysis 2* / eds. M. Pinsky and V. Wihstutz. Boston : Birkhauser, 1992. P. 3–35.

153. *Baxendale P. H.* A stochastic Hopf bifurcation // *Prob. Th. Rel. Fields*. 1994. Vol. 99. P. 581.

154. *Belinskiy B., Caithamer P.* Stability of dynamical systems with a multiplicative white noise // *Stochastics and Dynamics*. 2003. Vol. 3, N 2. P. 187–212.

155. *Blekhman I. I., Fradkov A. L., Tomchina O. P., Bogdanov D. E.* Self-synchronization and controlled synchronization: general definition and example design // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2002. Vol. 58, N. 4–6. P. 367–384.

156. *Boccaletti S., Grebogi C., Lay Y.-C. et al.* The control of chaos: theory and applications // *Phys. Rep.* 2002. Vol. 366. P. 1–101.

157. *Bozler P.* A stochastic version of center manifold theory // Prob. Th. Rel. Fields. 1989. Vol. 83. P. 509–545.
158. *Bronstein I. U., Kopanskii A. Ya.* Smooth Invariant Manifolds and Normal Forms. Singapore : World Scientific, 1994.
159. *Bucklew J. A.* Large deviation techniques in decision, simulation, and estimation. N. Y. : Wiley, 1990.
160. *Chapman S. J.* Subcritical transition in channel flows // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 451. P. 35.
161. *Chen G., Dong H.* On feedback control of chaotic nonlinear dynamic system // Int. J. of Bifurcations and Chaos. 1992. Vol. 2, N 2. P. 407–411.
162. *Chen G., Dong H.* From chaos to order: Perspectives, Methodologies and Applications. Singapore : World Scientific, 1998.
163. *Chen G.* On some controllability conditions for chaotic dynamics control // Chaos, Solitons & Fractals. 1997. Vol. 8, N 9. P. 1461–1470.
164. *Chen G., Yu X.* Chaos control: theory and applications. N. Y. : Springer-Verlag, 2003.
165. Controlling chaos and bifurcations in engineering systems / ed. G. Chen. Boca Raton, USA : CRC Press, 1999.
166. *Crauel H., Flandoli F.* Additive noise destroys pitchfork bifurcation // J. Dynam. Differential Equations. 1998. Vol. 10. P. 259–274.
167. *Crutchfield J., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46. P. 933.
168. *Dauchot O., Vioujard N.* Phase space analysis of a dynamical model for the subcritical transition to turbulence in plane Couette flow // Eur. Phys. J. 2000. Vol. 14. P. 377.
169. *Day M. V.* Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems // Appl. Mathematics and Optimization. 1994. Vol. 30. P. 79.

170. *Day M. V.* Exit cycling for van der Pol oscillator and quasipotential calculations // *J. Dynam. Differential Equations*. 1996. Vol. 8. P. 573–601.

171. *Day M. V.* Mathematical approaches to the problem of noise-induced exit. *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications*. Boston : Birkhauser, 1999.

172. *Deissler R. J., Farmer J. D.* Deterministic noise amplifiers // *Physica D*. 1992. Vol. 55. P. 155–165.

173. *Dembo M., Zeitouni O.* Large deviations techniques and applications. Boston : Jones and Bartlett Publishers, 1995.

174. *Dorfle M., Graham R.* Probability density of the Lorenz model // *Phys. Rev. A*. 1983. Vol. 27. P. 1096–1105.

175. *Dykman M., Chu X., Ross J.* Stationary probability distribution near stable limit cycles far from Hopf bifurcation points // *Phys. Rev. E*. 1993. Vol. 48, N 3. P. 1646–1654.

176. *Emery M.* *Stochastic Calculus in Manifolds*. Berlin : Springer, 1989.

177. *Farrell B. F., Ioannou P. J.* Stochastic forcing of the linearized Navier-Stokes equations // *Phys. Fluids*. 1993. Vol. 5. P. 2600.

178. *Farrell B. F., Ioannou P. J.* Variance maintained by stochastic forcing of nonnormal dynamical systems associated with linearly stable shear flows // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72. P. 1188.

179. *Farrell B. F., Ioannou P. J.* Generalized stability theory. Part I: Autonomous operators // *J. Atmos. Sci.* 1996. Vol. 53. P. 2025.

180. *Farrell B. F., Ioannou P. J.* Stochastic dynamics of field generation in conducting fluids // *Astrophysical J.* 1999. Vol. 522. P. 1088.

181. *Fedotov S.* Non-normal and stochastic amplification of

magnetic energy in the turbulent dynamo: Subcritical case // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 067301.

182. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic analysis of a non-normal dynamical system mimicking a laminar-to-turbulent subcritical transition // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 066310.

183. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic analysis of subcritical amplification of magnetic energy in a turbulent dynamo // Phys. A. 2004. Vol. 342. P. 491–506.

184. *Fenichel N.* Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows // Indiana University Mathematics Journal. 1971. Vol. 2, N 3. P. 193–226.

185. *Fradkov A. L., Pogromsky A. Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. World Scientific Series of Nonlinear Science, 1998.

186. *Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.* Nonlinear and adaptive control of complex systems. Dordrecht : Kluwer Academic Publ., 1999.

187. *Fronzoni L., Mannella R., McClintock P. V. E., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. P. 834–841.

188. *Galias Z.* New method for stabilization of unstable periodic orbits in chaotic systems // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5(1). P. 281–295.

189. *Gardiner C. W.* Handbook of Stochastic Methods. N. Y. : Springer, 1996.

190. *Gebhardt T., Grossmann S.* Chaos transition despite linear stability // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. P. 3705.

191. *Graham R., Tel T.* Nonequilibrium potential for coexisting attractors // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33. P. 1322–1337.

192. *Graham R., Tel T.* Steady state ensemble for the complex Ginzburg – Landau equation with weak noise // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42. P. 4661–4677.

193. *Graham R., Hamm A., Tel T.* Nonequilibrium potentials for dynamical systems with fractal attractors or repellers // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66. P. 3089–3092.
194. *Grossmann S.* The onset of shear flow turbulence // *Rev. Mod. Physics.* 2000. Vol. 72. P. 603.
195. *Gubkin A. A., Ryashko L. B.* Stochastic cycles for a model of the Belousov-Zhabotinsky reaction under transition to chaos // *Neural, Parallel & Scientific Computations.* 2005. Vol. 13. P. 131–146.
196. *Haenggi P., Talkner P., Borkovec M.* Reaction-rate theory: fifty years after Kramers // *Rev. Mod. Physics.* 1990. Vol. 62. P. 251.
197. *Handbook of Chaos Control* / ed. H. G. Schuster. Wiley & Sons, 1999.
198. *Hausmann U. G.* Optimal stationary control with state and control dependent noise // *SIAM J. on Control.* 1971. Vol. 9, N 2. P. 184–198.
199. *Hausmann U. G.* Stability of linear systems with control dependent noise // *SIAM J. on Control.* 1973. Vol. 11, N 2. P. 382–394.
200. *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant Manifolds. Berlin : Springer-Verlag, 1977.
201. *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-Induced Transitions. Berlin : Springer, 1984.
202. *Hoyng P., Schmitt D., Teuben L. J. W.* The effect of random alpha-fluctuations and the global properties of the solar magnetic fields // *Astron. Astrophys.* 1994. Vol. 289. P. 265.
203. *Hoyng P., Schutgens N. A. J.* Dynamo spectroscopy // *Astron. Astrophys.* 1995. Vol. 293. P. 777.
204. *Hwang C., Chow H., Wang Y.* A new feedback control of a modified Chua's circuit system // *Phys. D.* 1996. Vol. 92. P. 95–100.

205. *Ibrahim R. A.* Parametric Random Vibration. N. Y. : John Wiley and Sons, 1985.
206. *Ito K.* On stochastic differential equations // *Memoirs Amer. Math. Soc.* 1951. Vol. 4. P. 1–51.
207. *Ito H. M.* Ergodicity of randomly perturbed Lorenz Model // *J. of Statistical Physics.* 1984. Vol. 35. P. 151–158.
208. *Kaneko K.* Doubling of Torus // *Prog. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 1806–1810.
209. *Kano H., Nishimura T.* Periodic solutions of matrix Riccati equations with detectability and stabilizability // *Int. J. Control.* 1979. Vol. 29. P. 471–487.
210. *Kapitanyak T.* Controlling Chaos. N. Y. : Academic Press, 1996.
211. *Keizer J., Fox R. F., Wagner J.* On the amplification of molecular fluctuations nonstationary systems: hydrodynamic fluctuations for the Lorenz model // *Physics Letters A.* 1993. Vol. 175. P. 17–22.
212. *Kim J.-I., Park H.-K., Moon H.-T.* Period doubling of torus: Chaotic breathing of localized wave // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, N 4. P. 3948–3951.
213. *Kirchgaber U., Palmer K. J.* Geometry in the Neighborhood of Invariant Manifolds of Maps and Flows and Linearization. N. Y. : Longman, 1990.
214. *Kleinman D. L.* Optimal stationary control of linear systems with control dependent noise // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1969. AC-4, N 6. P. 673–677.
215. *Kleinman D. L.* Numerical solution of the state dependent noise problem // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1976. AC-21, N 3. P. 419–420.
216. *Kloeden P. E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin : Springer-Verlag, 1992.
217. *Kloeden P. E., Platen E., Schurz H.* Numerical solution

of SDE through computer experiments. Berlin : Springer-Verlag, 1994.

218. *Klosek-Dygas M. M., Matkowsky B. J., Schuss Z.* Stochastic stability of nonlinear oscillators // SIAM J. Appl. Math. 1988. Vol. 48, N 5. P. 1115–1127.

219. *Kraichnan R.* Diffusion of weak magnetic fields by isotropic turbulence // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 75. P. 657.

220. *Krause F., Rädler K.-H.* Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Berlin : Academic-Verlag, 1980.

221. *Kurrer C., Schulten K.* Effect of noise and perturbations on limit cycle systems // Phys. D. 1991. Vol. 50. P. 311–320.

222. *Kwakernaak H., Sivan R.* The maximally achievable accuracy of linear optimal regulator and optimal filters // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. AC-17, N 1. P. 79–86.

223. *Langevin P.* Sur la theorie du mouvement brownien // C.R.Acad. Sci. (Paris). 1908. Vol. 146. P. 530–533.

224. *Landa P. S., McClintock P. V. E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // Physics Reports. 2000. Vol. 323, P. 1–80.

225. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to external multiplicative noise / eds. W. Horsthemke, D. K. Kondepudi // Fluctuations and sensitivity in equilibrium systems. Berlin : Springer-Verlag, 1984. P. 143–149.

226. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1631–1634.

227. *Leung H. K.* Stochastic Hopf bifurcations // Chinese J. of Physics. 1997. Vol. 35, N 1. P. 47–55.

228. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flows // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 12(20). P. 139–163.

229. *Luchinsky D. G., Beri S., Mannella R., McClintock P.*

V. E. Optimal fluctuations and the control of chaos // Int. J. of Bifurcations and Chaos. 2002. Vol. 12. P. 583–604.

230. *Ludvig D.* Persistence of dynamical systems under random perturbations // SIAM Rev. 1975. Vol. 17, N 4. P. 605–640.

231. *McLane P. J.* The optimal regulator problem for a stationary linear system with state-dependent noise // Trans. ASME. J. Basic Eng. 1970. Vol. 92. P. 363–368.

232. *McLane P. J.* Optimal stochastic control of linear systems with state- and control-dependent disturbances // IEEE Tr. on Automatic Control. 1971. AC-16, N. 6. P. 793–798.

233. *Mao X.* Exponential stability of stochastic differential equations. Marcel Dekker, 1994.

234. *Milstein G. N., Tretyakov M. V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Series: Scientific Computation. Berlin : Springer-Verlag, 2004.

235. *Moffatt H. K.* Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. N. Y. : Cambridge University Press, 1978.

236. *Mohammed S.-E. A., Scheutzow M.* The stable manifold theorem for stochastic differential equations // The Annals of Probability. 1999. Vol. 27, N 2. P. 615–652.

237. *Moss F., McClintock P. V. E.* Noise in nonlinear dynamical systems. Cambridge University Press, 1989.

238. *Nakamiso T., Ohshiro M.* Output feedback control of linear stochastic systems // Syst. and Control. 1973. Vol. 17, N 7. P. 451–454.

239. *Namachchivaya N. Sri.* Hopf bifurcation in the presence of both parametric and external stochastic excitations // J. Appl. Mech. 1988. Vol. 110. P. 923.

240. *Naeh T., Klosek M. M., Matkowsky B. J., Schuss Z.* A direct approach to the exit problem // SIAM Journal Appl. Math. 1990. Vol. 50, N 2, P. 595.

241. *Nicolis J. S., Meyer-Kress G., Haubs G.* Non-uniform

chaotic dynamics with implications to information processing // Z. Naturforsch. 1983. Vol. 38(a). P. 1157–1169.

242. *Ott E., Grebodi C., Yorke J. A.* Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 1196–1199.

243. *Parmananda P.* Stabilization of unstable steady states and periodic orbits in an electrochemical system using delayed-feedback control // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 59. P. 5266–5571.

244. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421–428.

245. *Roessler O. E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57. P. 397–398.

246. *Roy R. V.* Asymptotic analysis of first passage problem // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1997. Vol. 32. P. 173–186.

247. *Ruzmaikin A. A., Shukurov A. M., Sokoloff D. D.* Magnetic Fields in Galaxies. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1988.

248. *Ryagin M. Yu., Ryashko L. B.* The analysis of the stochastically forced periodic attractors for Chua's circuit // Int. J. of Bifurcations and Chaos. 2004. Vol. 14(11). P. 3981–3987.

249. *Ryashko L. B.* Stability and stabilization of SDEs with periodic coefficients // Dynamic Systems and Applications. 1999. Vol. 8. P. 21–34.

250. *Ryashko L. B.* Exponential mean square stability of stochastically forced 2-torus // Nonlinearity. 2004. Vol. 17. P. 729–742.

251. *Ryashko L. B.* Exponential mean square stability of stochastically forced invariant manifolds for nonlinear SDE // Stochastics and dynamics. 2007. Vol. 7, N 3. P. 389–401.

252. *Ryashko L., Bashkirtseva I., Gubkin A., Stikhin P.* Confidence tori in the analysis of stochastic 3D-cycles // Mathematics and Computers in Simulation. 2009. Vol. 80. P. 256–269.

253. *Ryashko L. B., Shnol E. E.* On exponentially attracting

invariant manifolds of ODEs // Nonlinearity. 2003. Vol. 16. P. 147–160.

254. *Ryashko L. B., Schurz H.* Mean square stability analysis of some linear stochastic systems // Dynamic Systems and Applications. 1997. Vol. 6. P. 165–189.

255. *Sacker R. J., Sell G. R.* The spectrum of an invariant submanifold // J. Diff. Equat. 1980. Vol. 38. P. 135–160.

256. *Scheutzw M.* Comparison of various concepts of a random attractor: A case study // Arch. Math. 2002. Vol. 78. P. 233–240.

257. *Schmalfluss B.* The random attractor of the stochastic Lorenz system // ZAMP. 1997. Vol. 48. P. 951–975.

258. *Schmalfluss B.* A random fixed point theorem and the random graph transformation // J. Math. Anal. and Appl. 1998. Vol. 225. P. 91–113.

259. *Schmid P. J., Henningson D. S.* Stability and Transition in Shear Flows. Berlin : Springer, 2001.

260. *Selgrade J. F.* Isolated invariant sets for flows on vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 203. P. 359–390.

261. *Shinbrot T.* Progress in the control of chaos // Adv. Phys. 1995. Vol. 44(2). P. 73–111.

262. *Smelyanskiy V. N., Dykman M. I., Maier R. S.* Topological features of large fluctuations to the interior of a limit cycles // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, N 3. P. 2369.

263. *Soong T. T., Grigoriu M.* Random vibration of mechanical and structural systems. RTR Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. Jersey, 1993.

264. *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. Springer Series in Applied Mathematics 41. Berlin : Springer, 1982.

265. *Tomita K., Kai T.* Stroboscopic phase portrait and strange attractors // Phys. Lett. 1978. Vol. 66(a). P. 91–93.

266. *Tomita K., Kai T.* Chaotic response of a limit cycle // J. Stat. Phys. 1979. Vol. 21. P. 65–86.
267. *Tomita K., Ohta T., Tomita H.* Irreversible circulation and orbital revolution // Progress of Theoretical Physics. 1974. Vol. 52, N 6. P. 1744–1765.
268. *Trefethen L. N., Trefethen A. E., Reddy S. C., Driscoll T. A.* Hydrodynamic stability without eigenvalues // Science. 1993. Vol. 261. P. 578.
269. *Vorst E. L. B., Kant A. R., Molengraft M. J. G et al.* Stabilization of periodic solutions of nonlinear mechanical systems: Controllability and stability // J. of Vibration and Control. 1998. Vol. 4. P. 277–296.
270. *Wanner T.* Linearization random dynamical systems / eds. C. Jones, U. Kirchgraber, H. O. Walther. Dynamics Reported. N. Y. : Springer-Verlag. 1995. Vol. 4. P. 203–269.
271. *Widrow L.* Origin of galactic and extragalactic magnetic fields // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74. P. 775.
272. *Wiener N.* Differential space // J. Math. Phys. 1923. Vol. 2. P. 131–174.
273. *Wiggins S.* Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems. Berlin : Springer-Verlag, 1994.
274. *Willems J. C.* Mean square stability criteria for linear white noise stochastic systems // Prob. Contr. Inf. Theory. 1972. Vol. 2. P. 199–217.
275. *Willems J. C.* Minimum energy and maximum accuracy optimal control of linear stochastic systems // Int. J. Control. 1975. Vol. 22, N 1. P. 103–112.
276. *Willems J. L., Willems J. C.* Feedback stabilizability for stochastic systems with state and control dependent noise // Automatica J. IFAC. 1976. Vol. 12. N 3. P. 277–283.
277. *Wonham W. M.* Optimal stationary control of a linear

system with state-dependent noise // SIAM J. on Control. 1967. Vol. 5, N 3. P. 486–500.

278. *Wonham W. M.* On a matrix Riccaty equation of stochastic control // SIAM J. on Control. 1968. Vol. 6, N 4. P. 681–697.

279. *Wonham W. M.* Random differential equations in control theory. N. Y. : Academic Press, 1970.

280. *Yang X., Zhang S.* On the possibility of creating new asymptotically stable periodic orbits in continuous time dynamical systems by small feedback control // Nonlinearity. 2003. Vol. 16. P. 1853–1859.

281. *Yassen M. T.* Chaos control of Chen chaotic dynamical system // Chaos, Solitons & Fractals. 2003. Vol. 15. P. 271–283.

282. *Zakai M.* A Lyapunov criterion for the existence of stationary probability distributions for systems perurbed by noise // SIAM J. on Control. 1969. Vol. 7, N 3. P. 390–397.

283. *Zippelius A., Lucke M.* The effect of external noise in the Lorenz model of the Bernard problem. // J. of Statistical Physics. 1981. Vol. 24. P. 345–358.

284. *Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.* Magnetic Fields in Astrophysics. N. Y. : Gordon and Breach Science Publishers, 1983.

Научное издание

Ряшко Лев Борисович
Башкирцева Ирина Адольфовна

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Редактор и корректор Н. В. Чапаева
Оригинал-макет Л. Б. Ряшко

План изданий 2010 г., поз. 28. Подписано в печать 25.06.2010.

Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.

Уч.-изд. л. 11,5. Усл. печ. л. 14,64. Тираж 100 экз. Заказ 103

Издательство Уральского университета. 620000, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ». 620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

ISBN 978-5-7996-0528-5



9 785799 605285